LES FONCTIONS : GENERALITES

www.0et1.com

1/Vocabulaire et notations

1. introduction :

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle.
On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

a) Calculer l'aire du rectangle lorsque $x = 3$ cm.

Si la longueur est égale à 3 cm alors la largeur est égale à 2 cm.
Donc $A = 3 \times 2 = 6\text{cm}^2$.

b) Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle.

Les dimensions du rectangle sont donc : x et $5 - x$.
En effet : $P = 2x + 2(5 - x) = 10$ cm.
Ainsi l'aire du rectangle s'exprime par la formule $A = x(5 - x)$

c) Développer A.

$A = x(5 - x) = 5x - x^2$

d) On peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x :

x	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*
Aire=A(x)	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

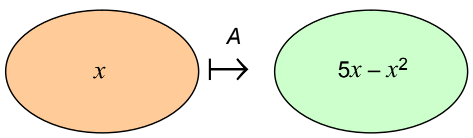
Ce tableau est appelé un tableau de valeurs.
Pour chaque nombre x, on a fait correspondre un nombre égal à l'aire du rectangle.

Par exemple : $1 \mapsto 4$
$2 \mapsto 6$

De façon générale, on note : $A : x \boxed{\mapsto 5x - x^2}$

$x \mapsto 5x - x^2$ se lit « à x, on associe $5x - x^2$ »

A est appelée une fonction. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



nombre de départ nombre correspondant

L'expression A dépend de la valeur de x et varie en fonction de x.
x est appelée la variable.
On note ainsi : $A(x) = 5x - x^2$
$A(x)$ se lit « A de x ».

2. Définitions

Ensemble de définition d'une fonction numérique

Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ où $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$.

Parfois, l'ensemble de définition est explicitement donné avec la définition de la fonction :

Soit *f* la fonction définie sur $]1,+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Lorsque l'ensemble de définition n'est pas indiqué, il suffit d'examiner l'expression pour déterminer les conditions d'existence de *f(x)* :

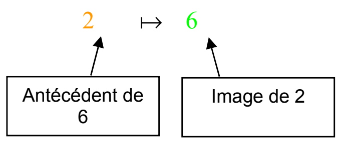
- Y-a-t'il un dénominateur ? (celui-ci doit être non nul)
- Y-a-t'il une racine carrée ? (le radicande doit être positif ou nul)
- Y-a-t'il une fonction particulière non définie sur $\mathbb{R}$?

3. Image, antécédent

Exemples :
Pour la fonction A définie plus haut, on avait :

$A(2) = 6$ $A(1) = 4$

On dit que :
- l'image de 2 par la fonction A est 6.
- un antécédent de 6 par A est 2.



Remarques :
- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.
  Par exemple : les antécédents de 5,25 sont 1,5 et 3,5 (voir tableau de valeurs).

Méthode : Calculer une image ou un antécédent

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :
   a) L'image de 4 par *f* est …
   b) Un antécédent de 5 par *f* est …
   c) f : … $\mapsto$ 4,2
   d) $f(20,25)$ = …

3) Calculer $f(4,41)$ et $f(1310,44)$

reponses

1)

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$	**3**	**4,2**	**5**	**5,5**

2) a) L'image de 4 par f est **3**.

b) Un antécédent de 5 par f est **16**.

c) f : **10,24** $\mapsto 4{,}2$

d) $f(20{,}25)$ = **5,5**

3) $f(4{,}41) = \sqrt{4{,}41} + 1$ = **3,1**

$f(1310{,}44) = \sqrt{1310{,}44} + 1$ = **37,2**

2/Représentation graphique

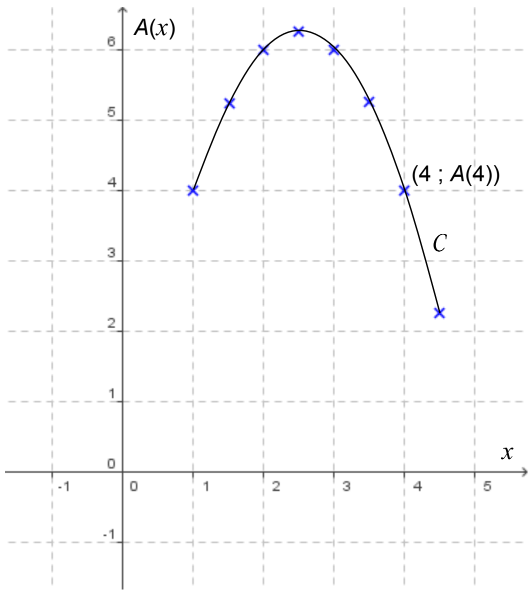
4. Courbe représentative

Exemple :

Représenter les données du tableau de valeurs du paragraphe **I.** dans un repère tel qu'on trouve en abscisse la longueur du côté du rectangle et en ordonnée son aire correspondante.

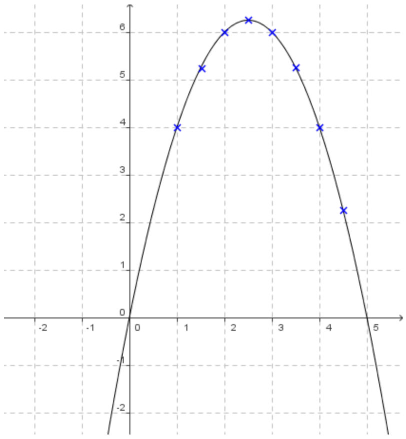
En reliant les points, on obtient une courbe C.

Tout point de la courbe C possède donc des coordonnées de la forme (x ; $A(x)$).



Ouvrir le logiciel *GeoGebra* et saisir directement l'expression de la fonction A.

Dans la barre de saisie, on écriera : a(x)=5x-x^2



La courbe représentative de la fonction A dépasse les limites du problème.
En effet, l'expression de la fonction A accepte par exemple des valeurs négatives de x, ce que les données du problème rejettent puisque x représente une longueur !

On peut ainsi dresser un tableau de signes de la fonction A sur un intervalle plus grand :

x	-1		0		5		6
$A(x)$		-	0	+	0	-	

5. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a) Résoudre l'équation $5x - x^2 = 2$.

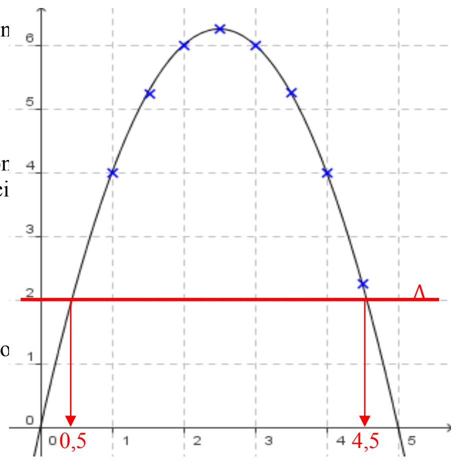
b) En déduire un ordre de grandeur des dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à 2 cm^2.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 2$. Donner une interprétation du résultat.

reponses

a) Il s'agit de trouver les antécédents de 2 par la fon
A.
Ce qui revient à résoudre l'équation
$A(x) = 2$.

On détermine les abscisses des points d'intersectior
courbe C avec la droite Δ parallèle à l'axe des absci
passant par le point (0 ; 2).
On lit graphiquement que l'équation
$5x - x^2 = 2$ admet pour solutions :
les nombres 0,5 et 4,5.



b) Le rectangle de dimensions 0,5 cm sur 4,5 cm po
une aire environ égale à 2 cm^2.

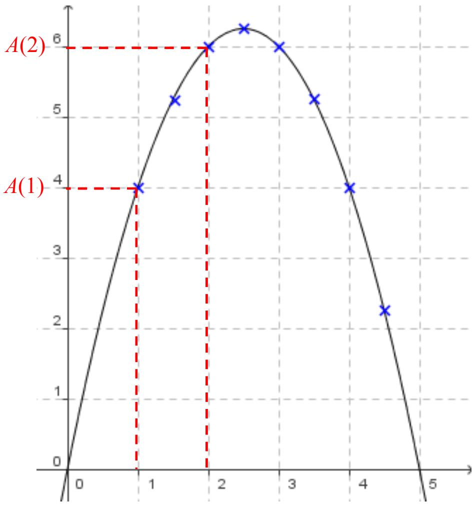
c) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de C pour lesquels C est strictement au-dessus la droite Δ.
On lit graphiquement que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle]0,5 ; 4,5[.

Si une dimension du rectangle est strictement comprise entre 0,5 et 4,5 alors son aire est supérieure à 2.

<u>Remarques :</u>
a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
b) L'équation $A(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.
c) Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

3/ Variations d'une fonction

6. <u>Exemple</u>



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [0 ; 2,5], l'aire A du rectangle est également croissante.

Par exemple : $1 < 2$ et $A(1) < A(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [2,5 ; 5], l'aire A du rectangle est décroissante.

Par exemple : $3 < 4$ et $A(3) > A(4)$.
On dit que la fonction A est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

7. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si a < b alors $f(a) \leq f(b)$.

- Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si a < b alors $f(a) \geq f(b)$.

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarques :
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

8. Maximum ; minimum

Exemple :
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 5], on a : $A(x) \leq 6{,}25$.
6,25 est le maximum de la fonction A.
L'aire du rectangle est maximum pour $x = 2{,}5$.

Définitions :
Soit f une fonction de l'intervalle I.
a et b deux nombres réels de I.

- Dire que f admet un maximum M en a de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M = f(a)$.
- Dire que f admet un minimum m en b de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m = f(b)$.

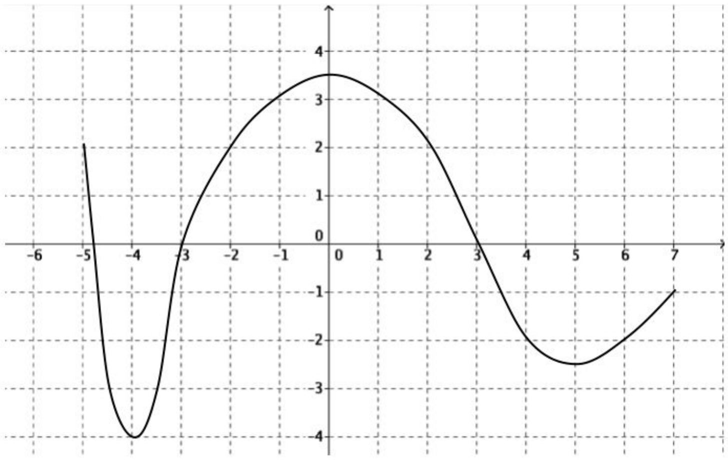
9. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.
Exemple :
La fonction A est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].
$A(0) = 0$ $A(2{,}5) = 6{,}25$ $A(5) = 0$

x	0		2,5		5
$A(x)$			6,25		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Méthode : Déterminer graphiquement les variations d'une fonction et dresser un tableau de variations

On considère la représentation graphique la fonction f :



1) Donner son ensemble de définition.
2) Donner les variations de la fonction.
3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

Reponses

1) La fonction f est définie sur [-5 ; 7].
2) La fonction f est croissante sur les intervalles [-4 ; 0] et [5 ; 7]. Elle est décroissante sur les intervalles [-5 ; -4] et [0 ; 5].
3) Le maximum de f est 3,5. Il est atteint en $x = 0$.
Le minimum de f est -4. Il est atteint en $x = -4$.
4)

x	-5	-4	0	5	7
$f(x)$	2		3,5		-1
		-4		-2,5	

4/PARITE D'UNE FONCTION

1.. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.
On dit que D_f est un ensemble de définition *centré* si et et seulement si :

Pour tout réel x, si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	*Exemples d'ensembles non centrés*
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}$-{0})	$\mathbb{R}$-{1}
$\mathbb{R}$-{-1; 1}	$\mathbb{R}$-{-1; 2}
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

2.. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est *paire* si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$

Remarques :

- si n est un entier *pair*, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.
(c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.
- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.

3.. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier *impair,* positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \rightarrow \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,

5/LES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonctions affines et fonctions linéaires

1. Définitions

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Exemples :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 6$ est une fonction affine.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire.

2. Variations

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient m et p deux nombres réels tels que $m < p$.

$f(p) - f(m) = (ap + b) - (am + b) = a(p - m)$

On sait que $m < p$ donc $p - m > 0$.

Le signe de $f(p) - f(m)$ est le même que celui de a.

- Si $a > 0$, alors $f(p) - f(m) > 0$ soit $f(m) < f(p)$.
  Donc f *est* croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $f(p) - f(m) = 0$ soit $f(m) = f(p)$.
  Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $f(p) - f(m) < 0$ soit $f(m) > f(p)$.
  Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$:

a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative.

Propriété :

Si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points distincts de la droite *(d)* représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ alors :

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration :

$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$

Comme la droite (d) n'est pas verticale, $x_A \neq x_B$, et on a : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

La représentation graphique correspondant à la fonction affine *f* passe donc par les points A(-2 ; 4) et B(3 ; 1).

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

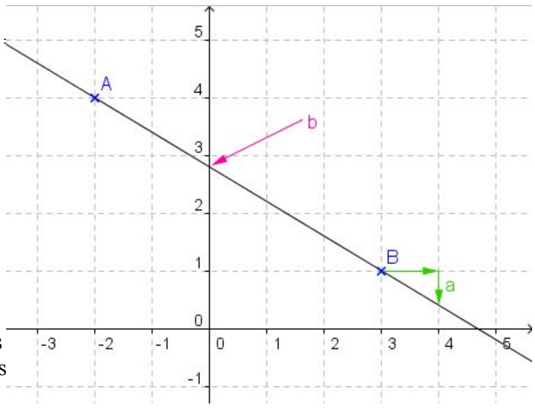
$$a = \frac{1-4}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

Comme A est un point de la droite, on a : *f* (-2)

De plus : $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$, donc on a :

$4 = -\frac{3}{5}\times(-2)+b$ donc $b = \frac{14}{5}$.

D'où : $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$



Remarque :
Le graphique permet de lire des valeurs approchées de *a* et *b*.
Cette méthode graphique n'est pas précise mais permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs cherchées.

Fonction carré

1. Définition

La fonction carré *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2. Variations

Propriété :
La fonction carré *f* est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.
$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$
Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

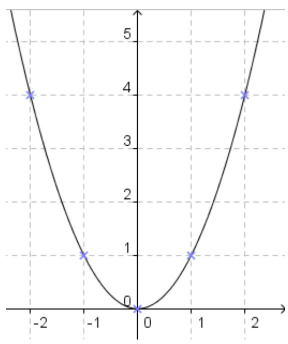


Tableau mis en forme

Remarques :

1) Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.

2) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.

3) Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction inverse

1. Définition

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire]-∞ ;0[U]0 ;+∞[. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Variations

Propriété :
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur]-∞ ; 0[U]0 ; +∞[qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.

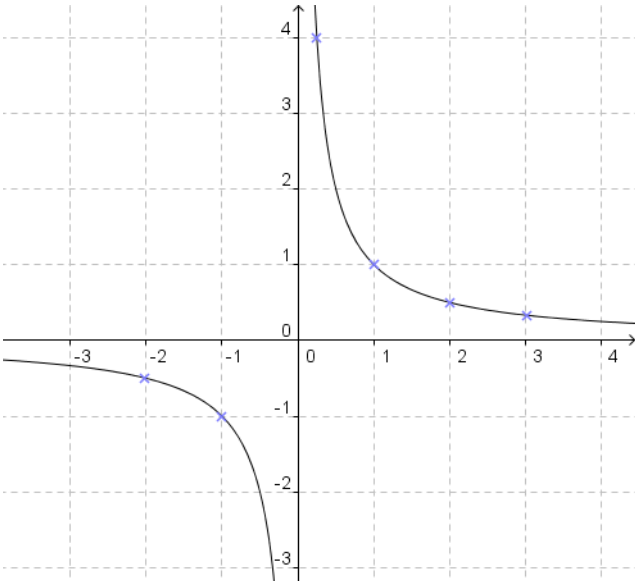
$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.
f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ est prouvée de manière analogue.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarques :

1) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est une hyperbole de centre O.

2) La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

3)

6/ FONCTIONS USUELLES

I. Fonction carré $f : x \mapsto x^2$.

1. Définition .

Définition : La fonction carré est la fonction définie sur • qui, à chaque réel x, associe son carré x^2.

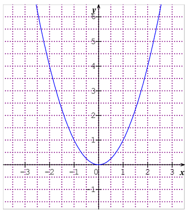
Propriété : Dans un repère, la courbe représentative de la fonction carré est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Propriété : la fonction carrée est une fonction paire. En effet, $f(-x)= f(x)$. La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Sens de variation.

Propriété : La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Démonstration : u et v sont deux réels tels que $u < v$.
$f(u) - f(v) = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.
Or par hypothèse $u < v$ donc $u - v < 0$.
Si u et v appartiennent $[0 ; +\infty[$ alors $u + v > 0$ et $u^2 < v^2$. f est alors croissante.
Si u et v appartiennent $]-\infty ; 0]$ alors $u + v < 0$ et $u^2 > v^2$. f est alors décroissante.



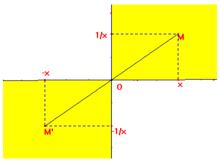
3. Représentation graphique.

La courbe ci-contre représentant la fonction carré dans un repère est une parabole.
L'origine O du repère est appelé sommet de cette parabole.

II. Fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Définition.

Définition : La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$ qui à chaque réel x associe son inverse $\frac{1}{x}$.



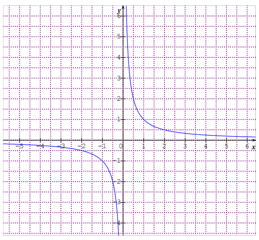
Propriété : Dans un repère, la courbe représentative de la fonction inverse est située dans les zones colorées sur la figure ci-contre.

Propriété : La fonction inverse est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$. Dans un repère, la courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

2. Sens de variation.

Propriété : la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ;0[$.

Démonstration : u et v sont deux réels tels que $u < v$.
$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v-u}{uv}$.
Or par hypothèse $u < v$ donc $v - u > 0$.
Si u et v appartiennent $[0 ; +\infty[$ alors $uv > 0$ et $\frac{v-u}{uv} > 0$ et donc $f(u) > f(v)$. f est alors décroissante.
Si u et v appartiennent $]-\infty ; 0]$ alors $uv > 0$ et $\frac{v-u}{uv} > 0$ et donc $f(u) > f(v)$. f est alors décroissante.



3. Représentation graphique.

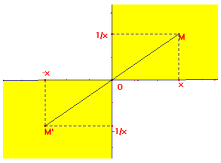
La courbe représentant la fonction inverse dans un repère est une hyperbole.

III. Fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

1. Définition.

Définition : la fonction cube est la fonction définie sur • , qui à chaque réel x associe son cube x^3.

Propriété : Dans un repère, la courbe représentative de la fonction cube est située dans les zones colorées sur la figure ci-contre.

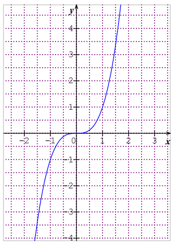


Propriété : La fonction cube est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$.Dans un repère, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine.

2. Sens de variation.

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur • .

3. Représentation graphique.



IV. Fonction racine carré $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

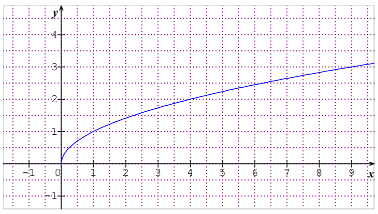
1. Définition.

Définition : La fonction racine carré est la fonction définie sur $[0 ;+\infty[$, qui à chaque réel x associe sa racine carré $\sqrt{x}$.

2. Sens de variation.

Propriété : La fonction racine carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3. Représentation graphique.



V. Fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$.

1. Définition.

Définition : La fonction valeur absolue est la fonction définie sur • , qui à chaque réel x associe sa valeur absolue$|x|$.

Propriété : Dans un repère, la courbe représentative de la fonction racine carré est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Propriété : La fonction valeur absolue est paire, en effet $f(-x)=f(x)$.La courbe représentative de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Sens de variation.

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement croissante sur [0 ; +∞[et strictement décroissante sur]-∞ ;0].

3. Représentation graphique.