Serie6 arithmetiques 2018

Exercice 1 : Vrai- Faux

1) Le reste de la division euclidienne de 9999243 par 11 est 12.
2) Si un nombre est divisible par 3 et par 9 alors il est divisible par 27.
3) Si $a + b$ est divisible par c; alors a et b sont divisible par c.
4) Si a et b sont divisible par c alors $a + b$ est divisible par c.
5) Si a et b deux entiers impairs alors $a^2 + b^2$ est divisible par 4.
6) Pour tout entiers naturel n ; $PGCD(2n + 1; 3n + 2) = 1$

Exercice 2 : Vrai- Faux

1) L'égalité $31 = 3 \times 9 + 4$ permet d'affirmer que :
   a) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 9.
   b) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 3.
2) Si $a|9$ et $a|4$, alors $a|31$.
3) Le nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul n'est toujours pair.
4) 2 est toujours un diviseur du produit de deux entiers consécutifs.
5) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers consécutifs.
6) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers impairs distincts.
7) Si d est un diviseur de a, alors d^2 est un diviseur de a^2.
8) Dans la division euclidienne de 229 par 12, le quotient est 18 et le reste 13.
9) Le reste dans la division euclidienne de 2013 par 8 est 5.
10) L'égalité $3754 = 123 \times 29 + 187$ permet de définir une division euclidienne.
11) Dans la division euclidienne par l'entier naturel n, il existe exactement n valeurs possibles pour le reste.
12) Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $r + 1$ est le reste de la division euclidienne de $a + 1$ par n.
13) Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors r^2 est le reste de la division euclidienne de a^2 par n.
14) Si le reste est nul dans la division euclidienne de a par b, alors a est un multiple de b.
15) On donne la division euclidienne de 3619 par 35 : $3619 = 35 \times 103 + 14$
    a) Les diviseurs naturels communs à 3619 et 35 sont 1 et 7.
    b) 3619 et 35 possèdent quatre diviseurs communs.
    c) 1 est le seul diviseur commun à 3619 et 103.
16) $PPCM(3 ; 16) = 32$.
17) $PPCM(6 ; 12) = 72$
18) Pour tout entier naturel n ;
    a) $PPCM(n ; 2n +1) = n(2n + 1)$
    b) $PPCM(n - 1 ; n + 1) = n^2 - 1$
19) Si $n = 3^{24} \times 5$ et $m = 3^7 \times 7$ alors $PPCM(m ; n) = 7n$

Exercice 3 :

Soit $N = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times 20 \times 21$.

a) Vérifier que $N + 2$ est divisible par 2 et que $N + 3$ est divisible par 3.
b) Montrer que $N + p$ est divisible par p, où p est un entier naturel compris entre 2 et 21.
c) En déduire 20 entiers naturels consécutifs et non premiers.

Exercice 4 :

a) Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2.
b) Montrer que si on retranche 1 du carré d'un entier naturel impair, on obtient un nombre divisible par 8.

Exercice 5 :

L'entier n = x1527y, a 6 chiffres. On sait que n est un multiple de 4 et que si on divise n par 11, le reste est égal à 5. Trouver n.

Exercice 6 :

Soient a, b et c trois entiers naturels.
1) Montrer que si c divise 3a + 4b et c divise 4a + 3b alors c divise 7b et c divise 7a.
2) Déterminer tous les entiers naturels c tel que c divise c + 13.

Exercice 7 :

Soit n un entier naturel supérieure à 1.
1) Montrer que $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
2) Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 30.
3) Montrer que si n est impair alors $n^5 - n$ est divisible par 240.

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose a = 3n + 4 et b = 9n – 5.
1) Soit d un diviseur de a et b. Montrer que d divise 17.
2) Déterminer n pour que PGCD (a, b) = 17 et que PPCM (a, b) = 170

Exercice 9 :

1) Trouver le reste de la division euclidienne par 11 des nombres : A = 142358 et B = 823152
2) Soit N = 234657412a36 où a est le chiffre des centaines de N. Déterminer a pour que :
   a) N est divisible par 3 b) N est divisible par 9 c) N est divisible par 11. d) N est divisible par81.

Exercice 10 :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose : x = 15a + 4b et y = 11a + 3b.
1) Calculer 3x – 4y et 15y – 11x.
2) Montrer que PGCD (a ; b) = PGCD(x ; y)

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel quelconque.
1) a) Montrer que PGCD $(n - 1, n^2 - 3n + 6)$ = PGCD $(n - 1, 4)$
   b) En déduire selon n la valeur de PGCD $(n - 1, n^2 - 3n + 6)$
2) Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-elle un entier naturel ?

Exercice 12 :

1) Trouver les diviseurs de 175.
2) Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{175}{n+3}$ soit un entier naturel.
3) Comment faut-il choisir n pour que $\frac{2n+181}{n+3}$ soit un entier naturel ?

Exercice 13 :

n est un entier naturel.

1) a) Montrer que les entiers : $a = n^2 + 7n + 10$ et $b = n^2 + 5n + 6$ sont divisibles par $n + 2$.
   b) Déterminer les valeurs de n pour les quels $3n^2 + 21n + 37$ est divisible par $n + 2$.
2) Montrer que $\forall\ n \in IN$: $n^3 - n$ est divisible par 6.

Exercice 14 :

Soit A = 245768413n54 où n est le chiffre des centaines.

1) Pour quelle valeurs de n l'entier A est-il divisible par3? Par 9 ?
2) Pour quelle valeurs de n l'entier A est-il divisible par8?
3) Déterminer n pour que A soit divisible par 11.
4) Déterminer n pour que A soit divisible par 6.

Exercice 15 :

1) Soient a et b deux entiers naturels tel que $a \geq b$ et $a^2 + b^2 + 9ab$ est divisible par 11.
   a) Montrer que $(a-b)^2$ est divisible par 11.
   b) En déduire que $a^2 - b^2$ est divisible par 11.
2) Soient a et b deux entiers naturels impairs.
   a) Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 2.
   b) Déterminer le reste de la division euclidienne $a^2 + b^2$ par 4.

Exercice 16:

1) Soient x = 57655a et y = 864b16
   a) Déterminer le chiffre a pour que le reste de la division euclidienne de y par 11 est égal à 7.
   b) Déterminer le chiffre b pour que x soit divisible par 3 et 5.
2) Soient $N_1 = 2n + 21$ et $N_2 = 3n + 15$ où $n \in IN$
   a) Montrer que si un entier d divise N_1 et N_2 alors d divise 33.
   b) En déduire les valeurs possibles de d.
   c) Déterminer alors P.G.C.D (576555 ; 864816).

Exercice 17 :

Soit a un entier naturel impair et supérieure ou égale à 3 et soit $x = \frac{a^2-1}{2}$

1) Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2.
2) Montrer que x est divisible par 4.
3) Montrer que a ; x et (x + 1) sont les cotes d'un triangle rectangle.
4) a) Si a = 85; quel est le reste de la division euclidienne de x par 5 , par 9 et par 11? Justifier.
   b) Si a = 87, quel est le reste de la division euclidienne de x par 2, par 3 et par 11? Justifier.

Exercice 18

a) Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3 (on pourra utiliser un arbre de choix)

b) En déduire que : $(1234567891)^3 - 1234567891$ est un multiple de 3.

Exercice 19 :

Soit x un entier naturel.

1) Développer $(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$

2) a) On pose $x = 2$, montrer que $x^{12} - 1$ est divisible par 7.

   b) Montrer que pour tout entier non nul n, on a ; $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

3) En déduire les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

4) Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 20 :

Soit n un entier naturel.

1) vérifier que : $(1 + n)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

2) déduire : a) 14641 est un carré parfait. b) Le reste de la division euclidienne de $(201)^4$ par