Exercices***** continuité –derivee-fonctions*****www.0et1.com

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ x<1\\ \sqrt{x^2+3}-1 & si\ x\geq 1\end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f sur un repère orthonormée $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ $\left(\text{On vous donne } \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=0\right)$

b)En déduire que f continue en 1

c) Montrer que f est continue sur IR

2)a) Vérifier que pour tout $x\in\,]-\infty;1[\,;\ \dfrac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$

b) En déduire que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$

3)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-1$,interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a)Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$

Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que f (1)=2 alors

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1$

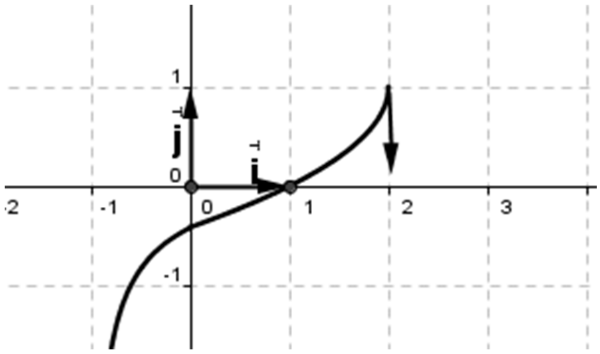
2) f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(2)=0$ alors :

a) La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

b) La courbe de f admet une tangente vertical au point d'abscisse 2.

c)La courbe de f admet nécessairement un extremum au point d'abscisse 2.

3) La courbe ci-dessous est celle d'une fonction continue sur $]-1,2]$



a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=2$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de dérivabilité de f et sa fonction dérivée f'

1) $f(x)=\sqrt{x^4+5x^2}$

2) $f(x)=\left(x^2+\sqrt{x}\right)^5$

3) $f(x)=(x-1)(x+3)^4$

4) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1)a)Vérifier que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$,En déduire que f est continue a droite en 0

b) Montrer que f est dérivables à droite en 0.

2)a)Montrer que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{1}{x}}$

b) Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

3)a)Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

c)Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle I que l'on précisera

d) Calculer $f(1)$, en déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1)$