Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 22/07/08 - Durée : 3h 03mn

N.B. * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

Exercice I , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts)

Q1.1 Résoudre le système des équations linéaires suivant : $x + 2y + 3z = 0$, $3x + y + 2z = 1$ et $2x + 3y + z = 2$

Q1.2 Soit A, B et C trois ensembles non vide et on suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ? (avec justification)

Q1.3 Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère les points A, B et C de coordonnés respectives $(-1, 0)$, $(2, 4)$ et $(3, 3)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Q1.4 On considère l'énoncé $\mathcal{P}$: " Si le carreau est vert alors il est en marbre ". Donner la négation de $\mathcal{P}$.

Q1.5 Soit $x \in I\!R$ et on considére l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Nous pouvons encore l'écrire : $(x+1)^2 - 2x = 0$ ou $(x+1)^2 = 2x$. Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit : $x \geq 0$. Mais notre équation de départ peut également s'écrire : $(x-1)^2 + 2x = 0$ ou $2x = -(x-1)^2$. Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit : $x \leq 0$. On a vu que $x \geq 0$ et $x \leq 0$, donc $x = 0$. Pourtant 0 ne vérifie pas l'équation de départ. Où est l'erreur ? (avec explication)

Exercice II , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts)

Q2.1 Calculer $\displaystyle\int_0^{100} E(x)\,dx$

Q2.2 Soit f une fonction dérivable et sa dérivée est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f^4(x)dx = \int_a^b f^3(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx$, montrer que f est constante sur $[a, b]$. (N.B. $f^2(x) = f(x)f(x)$)

Q2.3 Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|\,(x-1)^p}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Quelle valeur faut-il donner à $f(1)$ pour rendre f continue en 1 ?

Q2.4 Une petite fille compte sur ses doigts : 1 sur le pouce, 2 sur l'index, 3 sur le majeur, 4 sur l'annulaire, 5 sur l'auriculaire, 6 sur l'annulaire, 7 sur le majeur, 8 sur l'index, 9 sur le pouce et ainsi de suite ...
Son père lui demande ce qu'elle fait. " Je veux savoir sur quel doigt tombera 9999 " répond-elle. Pouvez-vous lui donner la réponse ?

Q2.5 Il y a un an, Youssef avait l'âge " à l'envers " de sa mère (les mêmes chiffres lus dans l'autre sens). L'an prochain, Youssef aura l'âge " à l'envers de son père ". Cette année la somme des âges des parents est égale à 102. Quel est l'âge actuel de Youssef ?

Les réponses doivent figurer sur cette feuille de l'épreuve

Exercice III : QCM , Barème : 14Pts

Attention : Afin de pénaliser les réponses basées sur le hasard, l'exercice est noté en entier de la manière suivante : Notons par n et m respectivement le nombre de réponses justes et fausses. La note attribuée à l'exercice sera :

$n+2$	si $n \geq 10$
n	si $m < 5$
0	si $m \geq 5$

“ La vie est complexe car nous avons tous une partie réelle et une partie imaginaire ”

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V ou F
Q3.01 : $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.02 : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.03 : Sept cars (identiques) pleins aux deux tiers partent de Meknès à Fès, un quart des touristes descend de chaque car. Les trois quarts des touristes restants sont rassemblés dans trois cars.	
Q3.04 : Le produit de deux fonctions négatives décroissantes est une fonction croissante	
Q3.05 : Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
Q3.06 : Une fonction ni continue ni monotone peut être bijective	
Q3.07 : Soient les fonctions $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, on note par $\mathcal{D}_{uov}$ et $\mathcal{D}_{vou}$ les ensembles de définition respectifs de $u \circ v$ et $v \circ u$. On a $\mathcal{D}_{uov} = \mathcal{D}_{vou}$	
Q3.08 : On note F l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y) f(x-y) = (f(x) f(y))^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$ La fonction $x \longmapsto 2^{-x^2}$ appartient F	
Q3.09 : La fonction $f : x \longmapsto x - 1 + \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et telle que $f(1) = 1$ admet une tangente en tout point de $\mathbb{R}$	
Q3.10 : On considère $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$, on a $I_1 = I_2$	
Q3.11 : L'équation $10x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$	
Q3.12 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\left(x^2 + 3x + 1\right) e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x+3) e^x$	

Exercice IV : Questions à réponse précise, Barème : 12Pts

Répondre dans la colonne réponse		
Barème	Question	Réponse
2Pts	**Q4.01 :** Citer parmi les propositions A, B, C et D celles qui sont équivalentes ? $\begin{cases} A: & (P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R \\ B: & (P \text{ et } Q) \Longrightarrow R \\ C: & P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R) \\ D: & (P \Longrightarrow R) \, et \, (Q \Longrightarrow R) \end{cases}$	
1Pt	**Q4.02 :** Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ et soit la fonction $F : x \longmapsto f(\sin t)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer la dérivée seconde de F.	
1Pt	**Q4.03 :** Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$	
2Pts	**Q4.04 :** On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. a) Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. b) Soient $A = \{a, b, d, f\}$ un des sous.ensembles de E, calculer le nombre d'applications de E dans A.	
0Pt	**Q4.05 :** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)$ Calculer $g'(x)$	
1Pt	**Q4.06 :** Calculer l'intégrale $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$	
2Pts	**Q4.07 :** Déterminer l'ensemble $f(I)$ dans les cas suivants : a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ et $I =]0, 1[$ b) $f(x) = \sin x$ et $I =]0, \pi]$	
1Pt	**Q4.08 :** Soit A le point de coordonnées $(1, -2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x+4y-1=0$. Calculer la distance de A à $\mathcal{D}$.	
1Pt	**Q4.09 :** Calculer la partie réelle et imaginaire du complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$	
1Pt	**Q4.10 :** Au fond d'un puits de 12 m se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de 3 m. Mais chaque nuit, il glisse de 2 m. Il commence son ascension le 1er juin à 8 heures. Quel jour et quelle heure sortira-t-il du puits ?	