الأولى بكالوريا علوم تجريبية	النهايات والإتصال	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$: (i ; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-1}$: (vii

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{2x^2-2x}$: (ii ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^5-5x+6}$: (viii

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{3x^2-6x}$: (iii ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$: (ix

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$: (iv ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$: (x

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}$: (v ; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x}$: (xi

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4x^2+5}-3}$: (vi ; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$: (xii

التمرين 2 :

أ حسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{|x-2|}$: (i ; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$: (vii

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1-2x}{(x+3)^2}$: (ii ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2x}{x^2-x}$: (viii

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{4-2x}{x^2-4x+4}$: (iii ; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x$: (ix

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3-4x}$: (iv ; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x$: (x

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$: (v ; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1+2\sqrt{1-x}}{(x-1)\left(1-\sqrt{1-x}\right)}$: (xi

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x^2}{x^2-1}$: (vi ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+|x|}}$: (xii

التمرين 3 :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-x)}{x-1}$: (i ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$: (v

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$: (ii ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$: (vi

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\tan(x^2-3x)}{x-3}$: (iii ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sin x}$: (vii

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}$: (iv ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$: (viii

التمرين 4 :

أحسب النهايتين التاليتين :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$: (i ; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}$: (ii

التمرين 5 :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$: (i ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{\cos x}{x+1}}{x}$: (vii

$\lim\limits_{x\to +\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$: (ii ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$: (viii

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}$: (iii ; $\lim\limits_{x\to 0}\tan\left(\sqrt{x^2+\dfrac{\pi^2}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$: (ix

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$: (iv ; $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\pi\dfrac{\sin x}{x}\right)$: (x

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$: (v ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$: (xi

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{(2x-\pi)^2}$: (vi ; $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$: (xii

التمرين 6 :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to +\infty}x^3-2x^2$: (i ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{(x+3)^2}$: (vii

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{x+2}$: (ii ; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+2}}{x}$: (viii

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}$: (iii ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{x+1}-x$: (ix

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2-x}}$: (iv ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{2x}$: (x

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1$: (v ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\dfrac{2}{\sqrt{x}}$: (xi

$\lim\limits_{x\to +\infty}x+\sin x$: (vi ; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$: (xii

التمرين 7 :

أحسب النهايتين التاليتين :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$: (i ; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$: (ii

التمرين 8 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I=\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$$

1. أ- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

ب- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

2. أ- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ؛

لاحظ أن: $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$

ب- استنتج تمديدا بالإتصال للدالة f عند العدد $x_0=1$.

التمرين 9 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

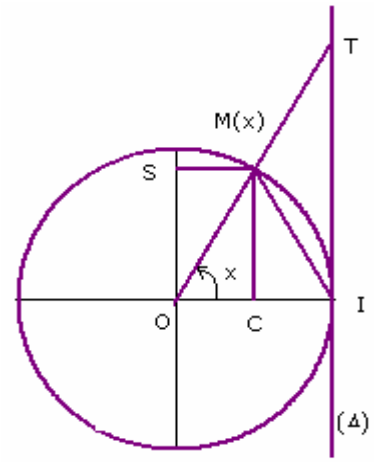
2. بين أن : $\forall x\in D$: $f(x)=\dfrac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left[1-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]}$.

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$. (يمكن استعمال : $\cos 2a=1-2\sin^2 a$)

ب- استنتج أن f تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ وحدده .

جـ- حدد في المجموعة $D\cap[0,\pi]$ ؛ المتراجحة : $f(x)>1$.

التمرين 10 :



1. أحسب $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ و $\mathcal{A}$ مساحات المثلثين OIM و OIT والقطاع الدائري OIM على التوالي .

2. بين أن : $\sin x\le x\le\tan x$: (1) : $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. باستعمال العلاقة (1) ؛ بين أن :

(2) : $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos x\le\dfrac{\sin x}{x}\le 1$.

4. تحقق من أن العلاقة (2) تظل صحيحة من أجل $x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$.

5. استنتج النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

6. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2$

ب- استنتج : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

التمرين 11 :

1. لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-\sin x}{-x+3}$.

أ- بين أن : $\forall x>3$: $\dfrac{2x+1}{-x+3}\le f(x)\le\dfrac{2x-1}{-x+3}$.

ب- استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2+\cos x}{2x}$.

أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

التمرين 12 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x) & ; \quad x\in[-1,1[\\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-2} & ; \quad x\notin[-1,1[\end{cases}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أ- أحسب : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{3}{4}\right)$ و $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ و $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

ب- حل في $[-1,1[$ ؛ المتراجحة : $f(x)>1$.

جـ- حل في $[-1,1[$ ؛ المعادلة : $(f(x))^2=1$.

3. بين أن f متصلة في النقطة 1 .

4. أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $D-\{1\}$ كما يلي :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

أ- تحقق من أن :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$: $x+\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$.

ب- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)$.

جـ- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=-\pi$. (ضع : $t=x-1$)

التمرين 13 :

f و g دالتان عدديتان معرفتان بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\sqrt{1-|x|}} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{1-\sqrt{|x|-1}}$$

1. حدد D_f و D_g مجموعتي تعريف f و g على التوالي .

2. بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة $x_0=0$.

3. أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

التمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f في النقطة 1 .
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 1 .

التمرين 15 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x^2-3x & ; \quad x<-1 \\ f(x)=\dfrac{3x^2+8}{x^2+1} & ; \quad -1\le x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+8}+2 & ; \quad x\ge 1 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f في النقط : -1 و 0 و 1 .
2. بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (معللا جوابك)

التمرين 16 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f وأحسب : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
2. أعط تمديدا بالإتصال للدالة f في النقطة $x_0=-2$.

التمرين 17 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3+a-3 & ; \quad x<0 \\ f(x)=\dfrac{\sin(2x)\left(1-\cos x\right)}{x^3} & ; \quad x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1. أ- أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

ب- حدد العدد الحقيقي a علما أن الدالة f متصلة على اليسار في 0.

2. بين أن f متصلة على اليمين في النقطة 0 .
3. ما هي قيمة العدد الحقيقي a التي من أجلها تكون f متصلة في 0 .

التمرين 18 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=1-3x & ; \quad x\le -1 \\ f(x)=x^2+x+4 & ; \quad -1<x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. بين أن f متصلة في النقطة (-1) .
3. هل الدالة f متصلة في النقطة 1 ؟
4. بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة 2 وعرف هذا التمديد .

التمرين 19 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{4+\cos x}-2}{x^2}$$

1. بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^* \quad : \quad |f(x)|\le \dfrac{1}{x^2}$.
2. حدد النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

التمرين 20 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

1. بين أن : $\forall x\in]4,+\infty[\quad : \quad 1\le f(x)$.
2. بين أن : $\forall \in]0,+\infty[\quad : \quad f(x)\le 1+\dfrac{1}{x}$.
3. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

التمرين 21 :

1. حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي m النهاية التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}+mx\right)$$

2. حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي a النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{ax}{(x^2-1)^2}\right)$$

3. حدد حسب قيم الوسيطين الحقيقيين a و b النهاية التالية :

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-a)(x-b)}{x^2+x}$$

التمرين 22 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{\left(1-\tan x\right)^2}{1+\cos(4x)}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. نضع : $I=\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

أ- بين أن :

$$\forall h\in I \quad : \quad f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)=\frac{2\tan^2 h}{\left(1+\tan^2 h\right)\sin^2 2h}$$

ب- بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة $\dfrac{\pi}{4}$.

التمرين 23 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-(x+1)$$

1. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \quad g(x)+1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

تحقق من أن : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \quad \sqrt{x^2+1}+1>2$.

ب- استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}^* : \quad |g(x)+1|\le\dfrac{1}{2}|x|$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ؛ ثم استنتج أن g تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة 0 ينبغي تحديده .

التمرين 24 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. أثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*} : \quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$.
3. أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.