النهايات و الاتصال

جدول للنهايات

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$	نهاية $f\times g$	نهاية $\frac{f}{g}$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$\frac{l}{l'}\ (l'\neq 0)$
l $\quad l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
l $\quad l\neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l\neq 0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l\neq 0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l

نهاية f	نهاية $\sqrt{f}$
$l\geq 0$	$\sqrt{l}$
$+\infty$	$+\infty$

تمارين

تمرين1

بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad \left|x\sin\frac{1}{x^2}\right|\leq|x|$ و استنتج $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}$

تمرين2

حدد $\lim\limits_{x\to -2}2x^2-6x-1$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-2x}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-12}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{2x^2-x-1}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x}}$

تمرين3

أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين التاليتين

أ- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-4+x^2}{x-2} & x\succ 2 \\ f(x)=\sqrt{x^2+12} & x\le 2 \end{cases}$ $x_0=2$

ب- $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} & x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$ $x_0=1$

تمرين4

أحسب a و b و c لكي تكون f متصلة في 3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & x\succ 3 \\ f(x)=\dfrac{-4+cx^2}{x-2} & x\prec 3 \\ f(3)=2 \end{cases}$$

تمرين5

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أدرس اتصالها على D_f في الحالات التالية

أ- $f(x)=2x^2-3x+6$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-3x-4}$ ج- $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$

د- $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+\dfrac{x}{x+1}$ ذ- $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$ ر- $f(x)=x^2+\sin(x)$

ز- $f(x)=3x^2-1+\tan(x)$

تمرين6

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

أ- $x_0=1$; $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ ب- $x_0=0$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

تمرين7

حدد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}$ $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\left(x^2-2x\right)}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x+\sin 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\sin x+\sin 2x}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$

تمرين8

حدد $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$ $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$

تمرين9

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sin(x-1)}{x^2-x} & x\succ 1 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{|2x-1|-1} & x\prec 1 \end{cases}$$

هل يمكن تمديد f بالاتصال في النقطة 1

تمرين10

نعتبر f دالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1} & x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

أدرس اتصال f في 1

تمرين11

حدد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^6-2x}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-6x^4-2x}$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}5x^3-3x$; $\lim\limits_{|x|\to+\infty}-4x^2-6x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ (نضع $x=\dfrac{1}{t}$) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x+2x$

تمرين12

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايات عند محدات D_f

أ- $f(x)=2x^2-3x$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+4}$

ج- $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ د- $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5x+6}$

تمرين13

أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{5x^2-3x}{x^2-3x-10}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x-1$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\sqrt{2}\cos x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2\left(x^2-x\right)}{x^2}$

تمرين14

نعتبر $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}$

1- بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال و حدده.

2- بين أن $|f(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$