الأســـتاذ محمــد الرقبــة
النـهــايـــات

I- النهايـــات(عموميات)

1) النهاية المنتهية.

1.1 النهاية عند الصفر

نشاط تمهيدي : مثل مبيانيا الدوال : $f(x)=x$; $g(x)=x^2$; $h(x)=x^3$

نلاحظ بالنسبة للدوال f و g و h أنه كلما اقتربت x من **0** فإن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ تقترب من **0** .

وبصيغة أخرى : نلاحظ أنه لكل ε من $\mathbb{R}_+^*$ يوجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث $|f(x)|\prec\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0\prec|x|\prec\alpha$

وفي هذه الحالة نقول أن $f(x)$ تؤول إلى **0** عندما تؤول x إلى **0** .

ونكتب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

خاصيـات : 1)

* $\lim\limits_{x\to 0} x=0$
* $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$
* $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

2) إذا كان على مجال منقط مركزه x_0 : $|f(x)|\prec u(x)$

و $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=0$

فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

تطبيقـات : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0}|x\cos x|$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+1}$

2.1 النهاية l عندما تؤول x إلى x_0

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال منقط مركزه x_0 و $l\in\mathbb{R}$.

نقول أن $f(x)$ تؤول إلى l عندما تؤول x إلى x_0.

أي تؤول $(f(x)-l)$ إلى **0** عندما تؤول $(x-x_0)$ إلى **0** .

نضع $x-x_0=h$

إذن عندما تؤول x إلى x_0 فإن h تؤول إلى **0**

ومنه $f(x_0+h)-l$ تؤول إلى **0** .

تعريف : لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

نقول أن نهاية $f(x)$ هي l عند x_0.

إذا وفقط إذا كانت نهاية $(h\to f(x_0+h)-l)$ هي **0** عندما تؤول h إلى **0** .

مثـال : $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$

نلاحظ أنه عندما تقترب x من **1** فإن $f(x)$ تقترب من $\dfrac{1}{2}$

لنبين ذلك

لدينا $\left|f(1+h)-\dfrac{1}{2}\right|=\text{.........}=\left|\dfrac{h}{2(h+4)}\right|\prec\dfrac{1}{2}|h|$

وبما أن $\lim_{h\to 0}|h| = 0$

فإن $\lim_{h\to 0} f(1+h) - \frac{1}{2} = 0$

أي $\lim_{h\to 0} f(1+h) = \frac{1}{2}$

يعني $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

لاحظ أنه من الممكن تعويض x ب 1 من البداية.

خاصية : ليكن I مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

إذا كان لكل x من I : $|f(x) - l| \le u(x)$ و $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$

فإن $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

تطبيق : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} + 2$

لدينا $|f(x) - 2| \le x^2$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

خاصية : إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

فإن $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

ملاحظة : إذا كانت النهاية l موجودة فإنها وحيدة.

3.1 النهاية على اليمين – النهاية على اليسار

تمهيد : لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = [0, +\infty[$

على العموم : إذا قلنا بأن x تقترب من x_0 فهذا يعني أن x تقترب إلى x_0 من اليمين ومن اليسار.

أما بالنسبة للدالة f فهي غير معرفة على يسار 0

إذن النهاية الممكن حسابها هي النهاية على يمين 0 لـ $f(x)$.

وهي 0 ونكتب $\lim_{\substack{x\to 0\\ 0\prec x}} f(x) = 0$

تعريف-1- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح $]x_0, x_0+\alpha[$ حيث $0 \prec \alpha$

نقول أن $f(x)$ تقبل النهاية l في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

لكل $0 \prec \varepsilon$ يوجد $0 \prec \alpha$ بحيث :

$$x_0 \prec x \prec x_0 + \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \prec \varepsilon$$

ونكتب $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x_0\prec x}} f(x) = l$

أو $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$

تعريف-2- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

خاصية : تكون للدالة f نهاية l عند x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

مل مثال: $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

2) النهاية المنتهية عند $+\infty$

تمهيد : مثل مبيانيا الدوال : $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x+1}$ و $h(x)=\frac{1}{x^2}$

من المنحنيات نستنتج أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

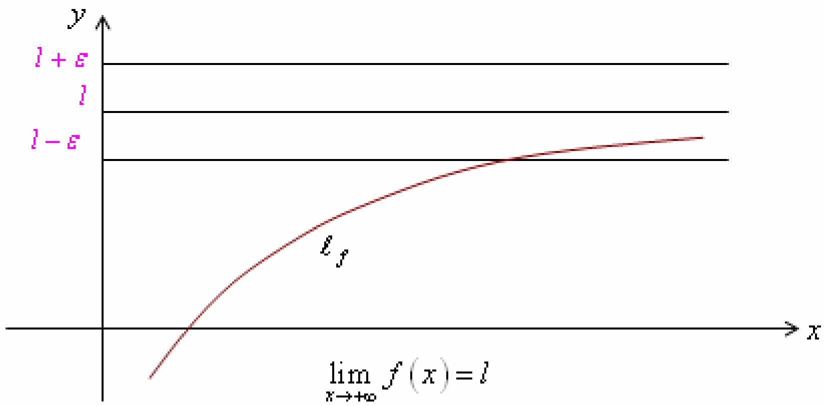
و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

خاصية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ملاحظة :



تعريف : لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال على شكل $[a,+\infty[$. و $l\in\mathbb{R}$ نقول أن $f(x)$ تؤول إلى l عندما تؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان :

$$\forall\varepsilon\succ 0 \quad \exists A\in\mathbb{R}^{*+} \;/\; A\prec x \quad\Rightarrow\quad l-\varepsilon\prec f(x)\prec l+\varepsilon$$

تعريف : نقول أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

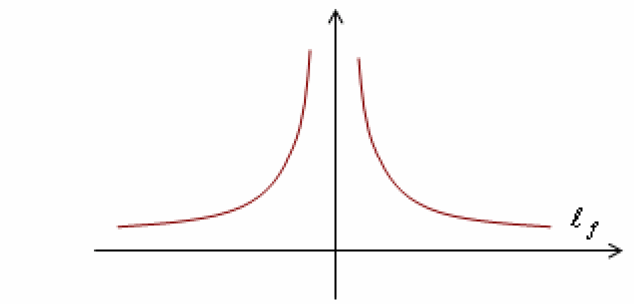
إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)-l=0$

3) النهاية المنتهية عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow ....$$

4) النهاية اللامنتهية

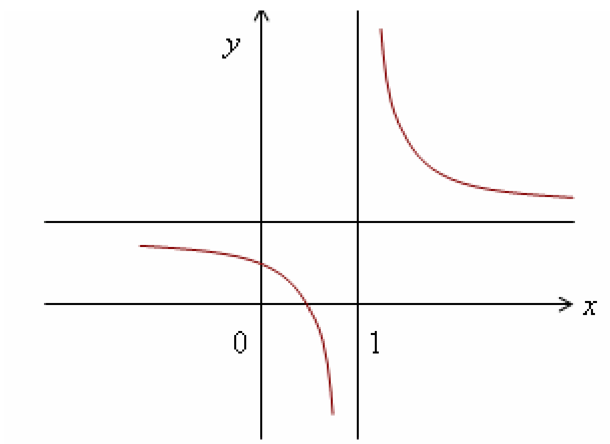
مثـال-1- $f(x)=\frac{1}{|x|}$



$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

مثال-2- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$



مثال-3- $f(x)=\frac{x}{2x-1}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=l$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=l$

مثال-4- $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

النهايات والترتيب

ليكن I مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

خاصية-1- إذا كانت f موجبة على المجال I وتقبل نهاية في x_0
فإن نهايتها موجبة.

خاصية-2- إذا كان للدالتين f و g نهاية عند x_0 وكان :
لكل x من I $f(x)\prec g(x)$
فإن $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$

خاصية-3- إذا كان للدالتين f و g نفس النهاية l عند x_0

ولكل x من I $\quad f(x) \le h(x) \le g(x)$

فإن $\quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

خاصية-4- إذا كان لكل x من I $\quad u(x) \prec f(x)$ و $\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty$

فإن $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

خاصية-5- إذا كان لكل x من I $\quad g(x) \prec f(x)$ و $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

فإن $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

ملاحظة : يمكن تعويض x_0 بـ $-\infty$ أو $+\infty$.

5) العمليات على النهايات

6-1. العمليات على النهايات المنتهية

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

و λ عدد حقيقي.

إذا كانت $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$

فإن

1) $\lim_{x \to x_0} f + g(x) = l + l'$

2) $\lim_{x \to x_0} f \times g(x) = l \times l'$

3) $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$

4) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l'} \qquad l' \neq 0$

5) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'} \qquad l' \neq 0$

6-2. العمليات على النهايات اللامنتهية

a- نهاية المجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

b- نهاية الجداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f \times g$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	شكل غير محدد

c- نهاية مقلوب دالة

نهاية f	نهاية $\frac{1}{f}$
$\pm\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

d- نهاية خارج دالتين

نهاية f	نهاية g	نهاية $\frac{f}{g}$
l	$\pm\infty$	0
$l \succ 0$	0^+	$+\infty$
$l \succ 0$	0^+	$-\infty$
$l \prec 0$	0^-	$+\infty$
$l \prec 0$	0^+	$-\infty$
$+\infty$	$l \succ 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$
0	0	شكل غير محدد
$\pm\infty$	$\pm\infty$	شكل غير محدد

ملاحظة : شكل غير محدد لا يعني أنه لا يمكن حساب النهاية.

6) تطبيقــات

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

b- نهاية دالة حدودية

خاصية : نهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $\pm\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة.

c- نهاية دالة جذرية

خاصية : نهاية دالة جذرية عندما يؤول x إلى $\pm\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة.

d- نهاية دالة لاجذرية

أمثلـة :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2}+x$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-2x+2}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2-1}{x+1}}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^3+x+1}}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x+1}}$

II- نـهايات الدوال المثلثية

تمهيد : لدينا لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad |\sin x| \prec |x| \prec |tgx|$

إذن $\lim_{x\to 0}\sin x = 0 = \sin 0$

تطبيقات :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tgx$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos^2 x + \sin x - 1$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x\prec\frac{\pi}{2}}} tgx$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx$$

بعض النهايات المهمة

(a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$ $\quad |\sin x| \prec |x| \prec |tgx|$

إذن لكل x من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad \left|\frac{x}{\sin x}\right| \prec \left|\frac{1}{\cos x}\right|$

وبما أن $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\cos x}\right| = 1$

فإن $\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$

وبما أن x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0

فإن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

خاصية : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1 \qquad a\in\mathbb{R}^*$$

يكفي وضع $X = ax$

(b **النهاية :** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

c) النهاية : $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}.\frac{sinx}{x} = 1$$

تطبيقات : أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{2x}$

3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\cos x - \sqrt{3}\sin x}{x - \frac{\pi}{6}}$

4) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\cos^2 x}{x^2+1}$