# ملخص لتحليلية الفضاء

## 1- الشرط التحليلي لاستقامة متجهتين

مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين من الفضاء

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0$

* تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا و فقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ أ و $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} \neq 0$

الأعداد الحقيقية $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = d1$ و $\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = d_2$ و $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = d_3$ تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

ملاحظة

يمكن أن نحصل على المحددات المستخرجة بالتقنية التالية

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = d1 \leftarrow \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{a}' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = d_2 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b}' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = d_3 \leftarrow \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c}' \end{pmatrix}$$

## 2- المتجهات المستوائية

### أ- محددة ثلاث متجهات

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

و $d_1$ و $d_2$ و $d_3$ المحددات المستخرجة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

العدد $a"d_1 + b"d_2 + c"d_3$ يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

نرمز له $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أو بـ $\begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix}$

نكتب $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a"d_1 + b"d_2 + c"d_3$

ملاحظة

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a" \\ b & b' & b" \\ c & c' & c" \end{vmatrix} = a"\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b"\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c"\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

### ب- مبرهنة

لتكن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a";b";c")$ متجهات من الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq \vec{0}$

تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا و فقط إذا $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \vec{0}$

## 3- تمثيل بارامتري لمستقيم

### أ- المعادلة المتجهة لمستقيم

$D(A;\vec{u})$ يرمز للمستقيم المار من $A$ و الموجه بـ $\vec{u}$

مبرهنة

| |
|---|
| $A$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة، $D(A;\vec{u})$ هي مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان<br>$D(A;\vec{u})=\{M\in(E)/\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \quad ,t\in\mathbb{R}\}$ |

### ب- تمثيل بارامتري لمستقيم

تعريف

| |
|---|
| الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لتكن $A(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ متجهة غير منعدمة<br>النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\lambda t \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(D)$ المار من $A(x_0;y_0;z_0)$<br>و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ |

## 4- - تمثيل بارامتري لمستوى

### أ- المعادلة المتجهة لمستوى

$P(A;\vec{u};\vec{v})$ يرمز للمستوى المار من $A$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

مبرهنة

| |
|---|
| $A$ نقطة من الفضاء $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين ، $P(A;\vec{u};\vec{v})$ هي مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية<br>$P(A;\vec{u};\vec{v})=\{M\in(E)/\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v} \quad ,(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$ |

### ب- تمثيل بارامتري لمستوى

| |
|---|
| الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. لتكن $A(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$<br>و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$ متجهتين غير منعدمتين<br>النظمة $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=x_0+\alpha t+\alpha' t' \\ y=y_0+\beta t+\beta' t' \\ z=z_0+\lambda t+\lambda' t' \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $(P)$ المار من $A(x_0;y_0;z_0)$<br>و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$ |

## 5- معادلة ديكارتية للمستوى

ليكن $(P)$ المستوى المار من $A(x_0;y_0;z_0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x' & \alpha & \alpha' \\ y-y' & \beta & \beta' \\ z-z' & \lambda & \lambda' \end{vmatrix}=0$$

$$M(x;y,z)\in(P)\Leftrightarrow (x-x')\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}-(y-y')\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \lambda & \lambda' \end{vmatrix}+(z-z')\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$$

نضع $a=d_1$ ; $b=d_2$ ; $c=d_3$ ; $d=-(d_1x_0+d_2y_0+d_3z_0)$ حيث $d_1$ و $d_2$ و $d_3$
المحددات المستخرجة المرتبطتين بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha;\beta;\lambda)$ و $\vec{u}'(\alpha';\beta';\lambda')$

$$M \in (P) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$
للمستوى $(P)$ المار من $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\lambda\right)$ و$\vec{u}'\left(\alpha';\beta';\lambda'\right)$
معادلة من شكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$
مجموعة النقط $M(x;y,z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$، مستوى

## 6- معادلتان ديكارتيان لمستقيم في الفضاء

مبرهنة

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$
إذا كان مستقيم $(D)$ مارا من النقطة $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له فان النظمة:
$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ تسمى نظمة معادلتين ديكارتيين للمستقيم $(D)$ إذا كان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و$c\neq 0$ أما إذا كان أحد المعاملات منعدما فان البسط المرتبط به يكون منعدما أيضا.

## 7- الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

### أ- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

$(D)=D(A;\vec{u})$ و $(\Delta)=D(B;\vec{v})$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ متوازيان
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ اما أ ن يكونا غير مستوائيين و اما أن يكونا متقاطعين

### ب- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(Q)=P(B;\vec{u}';\vec{v}')$
- يكون $(P)$ و $(P')$ متوازيين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و$\vec{v}'$ مستوائية
- يكون $(P)$ و $(P')$ متقاطعان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائية

$(P):ax+by+cz+d=0$ حيث $(a;b;c)\neq(0;0;0)$
$(P):a'x+b'y+c'z+d'=0$ حيث $(a';b';c')\neq(0;0;0)$
يكون $(P)$ و $(P')$ متوازيين قطعا إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم $t$ حيث
$a'=ta$ ; $b'=tb$ ; $c'=tc$ و $d'\neq td$
يكون $(P)$ و $(P')$ منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم $t$ حيث
$a'=ta$ ; $b'=tb$ ; $c'=tc$ و $d'=td$

### ج- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

مبرهنة

$(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ و $(D)=D(B;\vec{u}')$
- يكون $(P)$ و$(D)$ متوازيان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ مستوائية
- يكون $(P)$ و$(D)$ متقاطعان إذا و فقط إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ غير مستوائية