الهندسة الفضائيــــة

تمرين-1-

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد وممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوى (P) ذا المعادلة الديكارتية : $(P):3x-y+2z-4=0$

والنقطة $A(0,-2,1)$ من (P).

-1 حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) الذي يمر من A ويقبل $\vec{u}(1,-1,-2)$ متجهة موجهة له. تحقق من أن (D) ضمن (P)

-2 H و M هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطة $B\left(1,0,-\dfrac{41}{2}\right)$ على (P) و (D).

أحسب الجداء السلمي $\vec{u}.\overrightarrow{MH}$ واستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (BMH).

تمرين-2-

الفضاء الاقليدي $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر في الفضاء المستويين $P:x-2y+2z-1=0$

و $P':6x+2y-3z+1=0$

1) بين أن المستويين P و P' غير متوازيين.

2) ليكن Δ هو تقاطع المستويين P و P'. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم Δ.

3) بين أن مجموعة النقط المتساوية المسافة عن المستويين P و P' هي اتحاد مستويين Q و Q' وحدد معادلة ديكارتية لكل منهما.

4) بين أن المستويين Q و Q' متعامدان.

بين أن المستقيم Δ هو تقاطع المستويين Q و Q'.

تمرين-3-

الفضاء الاقليدي (E) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر في (E) النقط التالية : $A(0,2,-1)$ و $B(0,0,1)$

و $C(0,0,-1)$ و $H(0,0,h)$ حيث h ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P_h) المار من النقطة H والمتعامد مع المستقيم (BC).

2) أ- حدد المستقيم (AB) بمعادلتين ديكارتيتين.

ب- تحقق من أن المستقيم (AB) يقطع المستوى (P_h) في النقطة $N(0,1-h,h)$.

3) نعتبر في (E) المستقيمين (Δ) و (Δ') بحيث :

$$(\Delta)\begin{cases}x-z=1\\ y=0\end{cases}\qquad\qquad (\Delta')\begin{cases}x=-2t+2\\ y=2t\\ z=-2t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

المستقيمان (Δ) و (Δ') يقطعان المستوى (P_h) على التوالي في النقطتين P و Q.

حدد بدلالة h مثلوث إحداثيات كل من النقطتين P و Q.

4) أ- بين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل.

ب- نفترض أن h ينتمي إلى $]-1,1[$. بين أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت يجب تحديده.

تمرين-4-

في الفضاء الاقليدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(6;-6;6)$ و $B(-6;0;6)$ و $C(-2;-2;11)$

1) أ- أوجد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها B والتي تمر من A.

ب- أوجد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) عند النقطة A.

2) أ- أوجد إحداثيات النقطة D، تقاطع المستوى (P) والمستقيم العمودي عليه المار من C.

ب- أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (AD) و (BC).

تمرين-5-

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A(1,1,0)$ و $B(2,0,-1)$ و $C(0,3,-1)$ و $D(-1,4,0)$

1) أ- بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ب- حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ واستنتج مساحة الرباعي $ABCD$.

2) أ- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب- بين أن $x-4y+5z+3=0$ هي معادلة للمستوى (Q) الذي يتضمن AB والعمودي على المستوى (ABC).

ج- اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة $\Omega(-2,0,-3)$ والعمودي على (Q).

3) أ- أكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω والمماسة للمستوى (ABC).

ب- أدرس تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (CD).

تمرين-6-

الفضاء ξ منسوب إلى إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1,-2,-1)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,-1,-2)$

1) أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) أوجد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=(ABC)$.

3) لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ وشعاعها $r=1$

أ- بين أن (S) و (P) متقاطعان.

ب- أوجد معادلة ديكارتية لكل مستوى من المستويين (Q) و (Q') الموازيين للمستوى (P) والمماسين للفلكة (S).

تمرين-7-

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,0,-2)$ و $B(1,1,-1)$ و $C(-3,0,0)$

1) أ- حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

ب- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$

أ) حدد مركز وشعاع الفلكة (S)

ب) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

ج) حدد تقطع الفلكة والمستقيم (OB).

تمرين-8-

الفضاء ξ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2,1,2)$ و $B(2,3,0)$ و $C(-2,0,1)$. ولتكن (P) مجموعة النقط M بحيث : $AM=BM$

1) بين أن (P) هو المستوى الذي معادلته الديكارتية : $2x+y-z-1=0$

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من C والموازي للمستوى (P).

3) أ) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من C والعمودي على المستوى (P).

ب) أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D) ومسافة النقطة A عن المستوى (P).

4) أ) حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي قطرها $[AB]$.

ب) حدد تقاطع المستوى (P) والفلكة (S).

تمرين-9-

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر، نعتبر النقط التالية : $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,0)$ ، $C(0,0,2)$ و $\Omega\left(\frac{1}{2},1,1\right)$

و O' المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC).

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(\Omega O')$.

3) حدد إحداثيات النقطة O'.

4) نعتبر الفلكة S_λ التي مركزها Ω وشعاعها λ حيث λ عدد حقيقي موجب قطعا.

a) أعط معادلة ديكارتية للفلكة S_λ.

b) أوجد قيمة λ بحيث يكون المستوى (ABC) مماسا للفلكة S_λ.

c) أوجد قيمة λ بحيث يكون تقاطع S_λ و (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

تمرين-10-

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1,0,1)$ و $B(0,0,2)$ و $C(0,-1,1)$ والمستقيم المار من C ذا المتجهة الموجهة $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{i}+\vec{k}$

1) بين أن مجموعة النقط M بحيث : $MA=MB=MC$ هي المستقيم (Δ) المار من النقطة $G(0,0,1)$ ذو المتجهة الموجهة $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

2) أ- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على المستقيم (D) في النقطة C.

ب- حدد تقاطع (P) و (D).

استنتج معادلة ديكارتية للفلكة (S) المارة من النقطتين A و B والمماسة للمستقيم (D) في النقطة C.

تمرين-11-

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر المستقيم (D) المار من النقطة $A(0,0,3)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(1,1,1)$.

نعتبر المستوى (P) المار من النقطة O والموجه بالمتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{u}$

1) حدد التمثيل البارامتري للمستقيم (D).

2) حدد المعادلة الديكارتية للمستوى (P)

3) تحقق أن (D) و (P) متوازيان.

4) نعتبر الفلكة (S) ذات المركز O والمماسة للمستقيم (D)

a) احسب شعاع الفلكة (S)

b) حدد المعادلة الديكارتية للفلكة (S).

تمرين-12-

نعتبر في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,1,1)$ والمستوى (P) الذي معادلته $x+y-2z=0$

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من O والعمودي على المستقيم (OA).

2) أثبت أن (P) عمودي على (Q).

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (Q).

4) لتكن (S) الفلكة المحددة بالمعادلة : $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

حدد مركز (S) وشعاعها. بين أن تقاطع (S) و (P) دائرة محددا مركزها وشعاعها.

تمرين-13-

في الفضاء ξ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بما يلي :

$$(P): x-y+2z=0 \quad \text{و} \quad (Q): x+y+4z-4=0$$

1) حدد المستقيم (D) تقاطع (P) و (Q).

2) أوجد معادلة الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,4)$ والمماسة للمستقيم (D).

3) أدرس تقاطع الفلكة (S) والمستوى ذي المعادلة $x-z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي.

تمرين-14-

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,3)$.

1) اعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) أ- أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة O والعمودي على المستوى (ABC).

ب- حدد إحداثيات H نقطة تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (D).

ج- بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

3) لتكن (S) الفلكة التي مركزها النقطة O وشعاعها **1** .

أ) أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)

ب) حدد مركز وشعاع دائرة تقاطع الفلطة (S) والمستوى (ABC).

تمرين-15-

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين $A\left(1,0,2\right)$ و $B\left(1,-1,1\right)$ والمتجهة $\vec{u}\left(1,1,1\right)$.

1) أكتب تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(D\right)$ المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{u}$.
2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوى $\left(P\right)$ الذي يمر بالنقطة B ويتضمن $\left(D\right)$.
3) حدد إحداثيات النقطة C تقاطع المستوى $\left(P\right)$ والمستقيم المار من النقطة O والموجه بالمتجهة $\vec{k}$.
4) احسب مساحة المثلث ABC.
5) اكتب معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$ التي أحد أقطارها $\left[AB\right]$.
6) أوجد معادلة ديكارتية للمستوى المماس للفلكة $\left(S\right)$ في النقطة A.
7) بين أن تقاطع الفلكة $\left(S\right)$ والمستوى $\left(P\right)$ دائرة محددا مركزها وشعاعها.

تمرين-16-

نعتبر في الفضاء الاقليدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(2,2,0\right)$ و $B\left(1,0,1\right)$ و $C\left(0,1,5\right)$.

والمستوى $\left(P\right)$ ذا المعادلة : $3x-y+z-4=0$

1) a) تحقق من أن C تنتمي إلى المستوى $\left(P\right)$.
   b) اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(D\right)$ المار من A و B.
   c) بين أن : $\left(D\right)\subset\left(P\right)$
2) ليكن $\left(Q\right)$ المستوى المار من النقطة B و $\vec{v}\left(1,-4,-7\right)$ متجهة منظمية عليه.
   a) اعط معادلة ديكارتية للمستوى $\left(Q\right)$.
   b) بين أن $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$ متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم $\left(D\right)$.
3) لتكن النقطة H بحيث : $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$
   a) تحقق من أن H هو المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\left(D\right)$.
   b) احسب المسافة CH.
4) لتكن $\left(S\right)$ الفلكة ذات المركز C والشعاع $\sqrt{\frac{33}{2}}$
   a) حدد معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$
   b) ادرس الوضع النسبي لكل من $\left(P\right)$ و $\left(S\right)$ ثم $\left(Q\right)$ و $\left(S\right)$.

تمرين-17-

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(0,0,4\right)$ و $B\left(1,3,0\right)$ و $C\left(0,3,0\right)$ و $D\left(0,0,-\frac{3}{2}\right)$.

1) بين أن النقط A و B و C تحدد مستوى $\left(P\right)$ وأن $4y+3z-12=0$ معادلة ديكارتية له.
2) أ) اعط تمثيلا بارامتريا لكل من المستقيم $\left(\Delta\right)$ العمودي على $\left(P\right)$ في C والمستقيم $\left(\Delta'\right)$ العمودي على المستوى $\left(Q\right)$ في النقطة D، حيث $\left(Q\right)$ محدد بالنقطة D والمتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{k}$.
   ب) بين أن $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ يتقاطعان في النقطة $\Omega\left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$
3) لتكن $\left(\ell\right)$ دائرة ضمن $\left(P\right)$ مركزها C وشعاعها 1 و $\left(\ell'\right)$ دائرة ضمن $\left(Q\right)$ مركزها D وشعاعها $\frac{5}{2}$
   أثبت وجود فلكة $\left(S\right)$ تشتمل على $\left(\ell\right)$ و $\left(\ell'\right)$ وذلك بتحديد مركزها وشعاعها.