La sphère الفلكـــة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
ونرمز لها بـ : $S(A,R)$

$$S(A,R)=\{M\in\xi \,/\, AM=R\}$$

معادلة فلكة :

1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
لتكن : $S(\Omega,R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعها R حيث $R\succ 0$.
لدينا :

$$M(x,y,z)\in S(\Omega,R)\Leftrightarrow \Omega M=R$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$
$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega,R)$

أمثلــة :

1) $\Omega(3,0,1)$, $R=2$

$$S_1:(x-3)^2+(y)^2+(z-1)^2=4$$

2) $\Omega(1,2,-3)$, $R=1$

$$S_2:(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$$

3) $$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=2$$

S_1 هي فلكة مركزها $\Omega\left(-\sqrt{2},1,\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$.

4) $\Omega(0,0,0)$ و $R=1$

$$S_4:x^2+y^2+z^2=1$$

2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ.
توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.
لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M\in S\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

لتكن : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$
و : $M(x,y,z)$.

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

لدينا : $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو : $\frac{AB}{2}$.

3) **دراسة المعادلة :** $(E): x+y+z-2ax-2by-2cz+d=0$

لدينا : $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2+b^2+c^2-d$

الحالة① : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$

$$S = \varnothing$$

الحالة② : $a^2+b^2+c^2-d = 0$

$$S = \{\Omega(a,b,c)\}$$

الحالة③ : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$

نضع : $R^2 = a^2+b^2+c^2-d$ حيث $R \succ 0$

$$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

$$S = S(\Omega(a,b,c),R)$$

مثال :

$$(E): x^2+y^2+z^2-2y+z-3=0$$

ط1 :

لدينا :

$$a = 0$$
$$b = 1$$
$$c = -\frac{1}{2}$$
$$d = -3$$

إذن : $a^2+b^2+c^2-d = 1+\frac{1}{4}+3 = \frac{17}{4} \succ 0$

إذن : S فلكة مركزها : $\Omega\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

ط2 :

لدينا : $(E): x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{4}+3$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$S = S\left(\Omega\left(0,1,\frac{-1}{2}\right),\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

II- تقاطع فلكة ومستوى :

الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R.

لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S،

نحسب المسافة d بين (P) و Ω. $d=d(\Omega,(P))$

الحالة① : $d(\Omega,(P))\succ R$

$S\cap P=\varnothing$

الحالة② : $d(\Omega,(P))=R$

$(S)\cap(P)=\{H\}$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P).

في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S).

الحالة③ : $d(\Omega,(P))\prec R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H.

) حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث : $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

علما أن : $d=d(\Omega,(P))=\Omega H$

مثـال :

$(P):2x-y+z+1=0$

و : $S\{\Omega,2\}$

حيث : $\Omega(1,-1,1)$

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}\succ 2$

إذن : $S\cap P=\varnothing$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R.

وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $M\in P\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

ملاحظة :

$\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية على (P).

مثـال :

(S) فلكة معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$

و : $A(1,1,0)$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $A\in S$

إذن : $M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

وبمـاأن : $\Omega(1,-,1,0)$

$A(1,1,0)$

$M(x,y,z)$

فإن : $\overrightarrow{A\Omega}(0,-2,0)$

$\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z)$

إذن : $-2(y-1)=0$

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للفلكة S في النقطة A.

III- تقاطع فلكة ومستقيم :

مثـال 1 :

أدرس تقاطع الفلكة S والمستقيم (D).

حيث : $(S): x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0$

و : $(D):\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=2 \end{cases}$

لدراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D)،

نحل النظمة : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \\ x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0 \end{cases}$

الجـواب :

$$t^2+(t+1)^2+4-3t+2(t+1)-8-5=0$$

$$2t^2+t-6=0$$

لنحل المعادلة : $\Delta=1-4(2)\times(-6)$

$=49\succ 0$

إذن : $t_1=\dfrac{-1-7}{4}=-2$

$t_2=\dfrac{-1+7}{4}=\dfrac{3}{2}$

ومنه تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2,-1,2)$

و : $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},2\right)$.

مثـال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والفلكة (S).

حيث : $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=-4$

$(D):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1+2t \quad / \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

الجـواب :

$$(1+t-1)^2+(-1+2t+1)^2+t^2=-4$$

$$t^2+4t^2+t^2=-4$$

$$6t^2=-4$$

$$6t^2+4=0$$

$$\Delta=-96\prec 0$$

ومنه : $(S)\cap(D)=\varnothing$