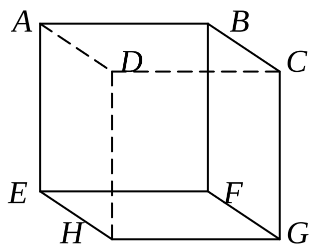
الجداء السلمـي في V_3 ذ الرقبة

I- الجداء السلمي

أنشطـة :

1- ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء ξ طول حرفه **1** ومركزه O.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}$ ، $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}$.



$$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}=EG^2=EH^2+HG^2=2$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DF}=DH^2=1$$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\quad\left(\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}\right)$$ لأن

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

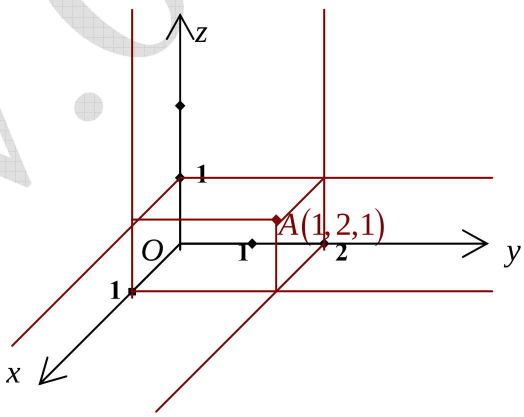
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HF}$$

$$=\frac{1}{2}HF^2$$

$$=1$$

2- الفضاء ξ منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

أنشئ النقطة $A(1,2,1)$.



تذكيـر :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى المتجهي V_2 و A ، B ، C ثلاث نقط من المستوى P بحيث :

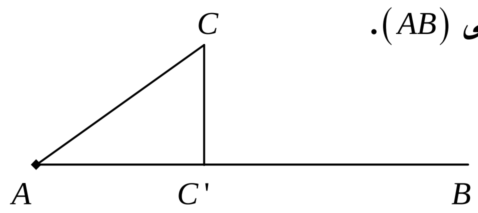
$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\quad \text{و}\quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}$$

فإن :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\overline{AB}\cdot\overline{AC'}$$

بحيث : C' هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB).



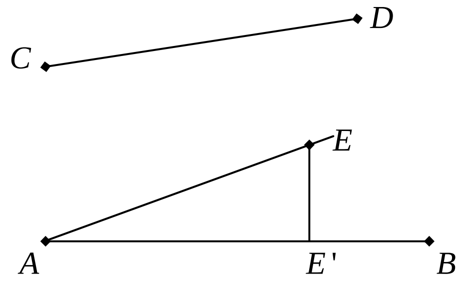
تعريف :

يمكن تحديد تعريف الجداء السلمي من المستوى إلى الفضاء وذلك كما يلي :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 و A ، B ، C و D أربع نقط من الفضاء ξ بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ فإنه توجد نقطة وحيدة E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. والجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{AE'}$$

بحيث E' هو المسقط العمودي للنقطة E على (AB).

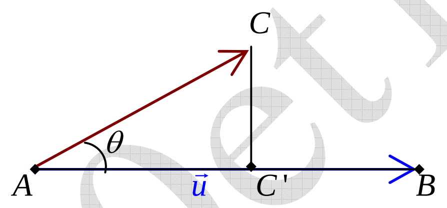


الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 ، $\vec{u}\neq 0$ و $\vec{v}\neq 0$.

- A ، B و C ثلاث نقط من ξ حيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

وليكن θ قياسا للزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$.



$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\overline{AB}\cdot\overline{AC'}$$

الحالة① : $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\theta=\frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC'=AC\cdot\cos\theta$

ومنه : $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC'$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta$$

أو

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta}$$

الحالة② : $\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\cdot AC'$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC'=AC\cos(\pi-\theta)$

إذن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\cdot AC\cdot\cos(\pi-\theta)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta$$

$$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

خاصيــة :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي V_3
و A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء ξ بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و θ قياس الزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$.
فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta$

خاصيات الجداء السلمي :

1- تعامد متجهتين :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.
$\vec{v} = \vec{0}$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2- منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}$ متجهة من V_3.

منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ ($\vec{u}^2$ هو المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$).

3- الأساس والمعلم المتعامدان :

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات من V_3 غير مستوائية.

نقول أن $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ أساس متعامد في V_3.

إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى، وإذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ واحدية فإن الأساس $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ أساس متعامد وممنظم

$\Updownarrow$

-1 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

-2 $\vec{j} \perp \vec{k}$ و $\vec{i} \perp \vec{k}$ و $\vec{i} \perp \vec{j}$

ونقول أن المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم، إذا وفقط إذا كان الأساس $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

الصيغة التحليلية للجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء :

الفضاء المتجهي V_3 موزد بالأساس المتعامد والممنظم $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

نعتبر المتجهتين :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$$
$$= xx' + yy' + zz'$$

خاصيـة :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.

حيث : $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{u}(x,y,z)$

لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

خاصيـة :

لتكن (x,y,z) و (x',y',z') هما مثلوثي إحداثيات المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس المتعامد والممنظم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx'+yy'+zz'=0$$

ملاحظة :

1- إذا كانت : $\vec{u}(x,y,z)$

فإن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2- إذا كانت : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

فإن : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

II- تطبيقات الجداء السلمي :

تطبيق 1 :

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A حيث : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}+\vec{j}$

و $\vec{u}$ متجهة موجهة له حيث :

$$\vec{u} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

1- اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

2- اعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من O والذي يحقق : $(D)\perp(P)$

3- استنتج تمثيلا بارامتريا للمستوى (P).

الجواب :

1- الحالة العامة :

لدينا :

$$M\in D \quad \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

الحالة الخاصة :

$$D : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

-2
$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow x-y+z=0$$

ومنه معادلة : $(P) : x-y+z=0$

-3 لدينا : $x-y+z=0$

إذن : $x=y-z$

نضع : $y=\alpha$ و $z=\beta$

إذن : $\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \quad / \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

وهذا تمثيل بارامتري للمستوى (P).

تطبيق 2 :

تحديد مستوى بنقطة ومتجهة منظمية.

حدد مجموعة النقط M من الفضاء ξ. بحيث : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ في الحالات التالية :

-a $k=0$ ، $A(1,1,1)$ و $\vec{u}(1,2,-1)$.

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z-1)$

و : $\vec{u}(1,2,-1)$

و : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

إذن : $1(x-1)+2(y-1)-1(z-1)=0$

إذن : مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ هي المستوى ذو المعادلة : $x+2y-z-2=0$

-b $k=2$ ، $A(1,0,1)$, $\vec{u}(1,1,2)$

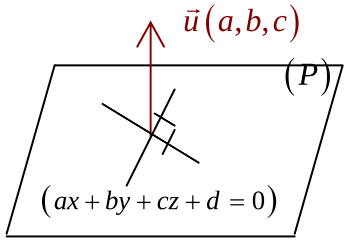
لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1,y,z-1)$

و : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=2$

$$1(x-1)+y+2(z-1)=2$$
$$x+y+2-5=0$$

خاصيـة :

- إذا كانت $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ منظمية على المستوى (P) ، فإن $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) حيث $d\in\mathbb{R}$.
- إذا كانت معادلة (P) تكتب على شكل $ax+by+cz=0$ فإن المتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ منظمية على (P).



تطبيق 3 :

نعتبر في الفضاء ξ المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوى (P) الذي معادلته هي : $P(3x-y+2z-4=0)$

والنقطة $A(0,-2,1)$ **من** (P).

1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) الذي يمر من A ويقبل $\vec{u}(1,-1,-2)$ متجهة موجهة له.

تحقق أن : $(D)\subset(P)$

2- H و K هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطة $B\left(1,0,\frac{-41}{2}\right)$ على (P) و (D).

حدد إحداثيات كل من H و K.

3- أحسب الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$ واستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (BKH).

الجواب :

1-
$$D\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=1-2t \end{cases}$$

لنتحقق أن : $(D)\subset(P)$

$$\begin{aligned} 3t(-2-t)+2(1-2t)-4 &= 3t+2+t+2-4t-4 \\ &=0 \end{aligned}$$

إذن : $(D)\subset(P)$

2- لدينا : $H\in(\Delta)\cap(P)$

حيث : (Δ) هو المستقيم المار من B والعمودي على (P).

ولدينا :
$$(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \qquad\qquad / \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\dfrac{-41}{2}+2t \end{cases}$$

و : $(P)\ :\ 3x-y+2z-4=0$

إذن :
$$3(1+3t)-(-t)+2\left(\frac{-41}{2}+2t\right)-4=0$$
$$3+9t+t-41+4t-4=0$$
$$14t=42$$
$$t=3$$

ومنه : $H\left(10,-3,\dfrac{-29}{2}\right)$

3- لنحسب : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$

لدينا : $\vec{u}(1,-1,-2)$

$$\overrightarrow{KH}\left(3,6,\frac{-3}{2}\right)$$

إذن : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}=3-6+3=0$

وبما أن : $\overrightarrow{BK}\ \perp\ \vec{u}$

و : $\overrightarrow{KH}\ \perp\ \vec{u}$

فإن : $(D)\ \perp\ (BKH)$

خاصية وتذكير :

> لتكن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) . و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\perp\vec{n}$ و $\vec{v}\perp\vec{n}$.
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (P).

تطبيق 4 : تعامد مستويين.

① أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطتين $A(-1,2,0)$ و $B(3,1,-2)$ وعمودي على المستوى (Q) ذوالمعادلة $3x-7y+2z=0$.

لدينا :
$$\overrightarrow{AB}(4,-1,-2)$$
$$\vec{n}(3,-7,2)$$
$$M\in(P) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{n},\overrightarrow{AB}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ط1 :

$$(x+1)\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}=0$$
$$16(x+1)+14(y-2)+25z=0$$
$$16x+14y+25z-12=0$$

ط2 :

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -7 \\ z & 2 \end{matrix}$$
$$14(x+1)-3z+8(y-2)+28z+2(x+1)+6(y-2)=0$$
$$16x+14y+25z-12=0$$

② أدرس تعامد المستويين (P) و (Q) في الحالتين التاليتين :

a- $(P): 2x-5y-z=0$

$(Q): x+2z-3=0$

لدينا : $\vec{n}_1(2,-5,-1)$ منظمية على (P).

ولدينا : $\vec{n}_2(1,0,2)$ منظمية على (Q).

و : $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2-2=0$

إذن : $(P)\perp(Q)$

b- $(P): 3x-y-2z-5=0$

$(Q): x+4y-3z+2=0$

لدينا : $(3\times1)+(-1\times4)+(-2\times-3)=3-4+6$

$$= 5 \neq 0$$

ومنه : (P) و (Q) غير متعامدان.

خلاصة :

يكون المستويين $P(ax+by+cz+d=0)$ و $Q(a'x+b'y+c'z+d'=0)$ متعامدين إذا وفقط إذا كان :

$$aa'+bb'+cc'=0$$

تطبيق 5 : تعامد مستقيمين.

أدرس تعامد المستقيمين (D) و (Δ) في الحالات التالية :

a- $D(A,\vec{u})$

حيث : $A(0,1,-1)$

$\vec{u}(1,1,1)$

و : $\Delta = \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$

لدينا : $\vec{u}(1,1,1)$ موجهة لـ (D).

و : $\vec{v}(1,-2,1)$ موجهة لـ (Δ).

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=1-2+1=0$$

ومنه : $(\Delta)\perp(D)$

b- $(D)=\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(1,0,1)$.

و (Δ) يمر من أصل المعلم ومتجهته الموجهة هي : $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$

و $\vec{v}(1,1,0)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=1-1+0=0$

ومنه : $(D)\perp(\Delta)$

خلاصة :

يكون المستقيمين $D(A,\vec{u})$ و $\Delta(B,\vec{v})$ متعامدين

إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

تطبيق 6 : مسافة نقطة عن مستوى.

ليكن (P) مستوى و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه ، و M نقطة من الفضاء ξ.

1- بين أن لكل B من (P) : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$

حيث : H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\vec{n}$$

$$=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$$

$$\left(\overrightarrow{HB}\perp\vec{n}\right)$$

2- بين أن : $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$

$\pm\overrightarrow{AH}\cdot\|\vec{n}\| = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$

إذن : $AH\cdot\|\vec{n}\| = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|$

إذن : $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$

3- لتكن $(x+y+z+1=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و $A(1,0,1)$ نقطة من ξ.

- أحسب مسافة A عن المستوى (P). $d(A,(P))$

لدينا : $B(1,1,-3)\in(P)$

إذن : $d(A,(P)) = AH$

حيث : H هو المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\overrightarrow{AB}(0,1,-4)$$

$$\vec{n}(1,1,1)$$

إذن : $AH = \dfrac{\left|(0\times1)+(1\times1)+(-4\times1)\right|}{\sqrt{1+1+1}}$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

4- لتكن $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P).

و : $(ax+by+cz+d=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء ξ.

لدينا : $d(A,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} / B(x_B,y_B,z_B)$

$$d(A,(P)) = \frac{\left|a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)+c(z_B-z_A)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{\left|-ax_A-by_A-cz_A-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

__خلاصة وخاصية :__

ليكن : $(P): ax+by+cz+d=0$

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من ξ .

$$d(A,(P)) = \frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$