

الجداء المتجهي Produit vectoriel

توجيه الفضاء

1- المعلم الموجه في الفضاء.

Repère orienté dans l'espace

ليكن $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما للفضاء \mathcal{E} ، ولتكن I, J, K ثلاث نقاط من \mathcal{E} .

بحيث : $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$

رجل أمبير هو رجل خيالي، رجلاه في O ورأسه في K وينظر في اتجاه النقطة I .
إذن لدينا حالتين :



إذا كانت J على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

وإذا كانت J على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ غير مباشر.

أمثلة :

نفترض أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

إذن : المعلم $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ مباشر.

المعلم $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ مباشر.

المعلم $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ غير مباشر.

ملاحظة :

إذا كان المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

فإن : الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

2- توجيه مستوى في الفضاء.

ليكن (P) مستوى في الفضاء \mathcal{E} و \vec{k} متجهة واحدية منظمية على (P) .

لتكن O نقطة من (P) .



يمكن إنشاء معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر، بحيث \vec{j} و \vec{k} متجهتان موجهتان للمستوى (P) .

ملاحظة :

يتم توجيه المستوى بتوجيه متجهة منظمة عليه.

II- الجداء المتجهي.

تعريف :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 و A و B نقطتان من ξ بحيث : $\vec{OA} = \vec{u}$ و $\vec{OB} = \vec{v}$.
الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} من هذا الترتيب هو المتجهة التي نرمز لها بـ : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ والمعرفة كما يلي :

• إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

• إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين :

- المتجهة $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ تحقق $\vec{w} \perp \vec{v}$ و $\vec{w} \perp \vec{u}$ و أساس مباشر $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$ حيث θ قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$

أمثلة :

نفترض أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما متعامدا منظميا مباشرا.

$$\begin{aligned} \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i} & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

تطبيق :

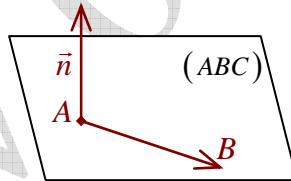
بين أن :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \theta + \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

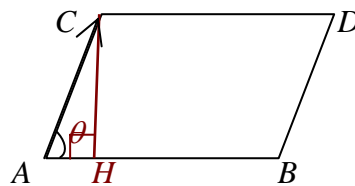
لدينا :

خصائص :

(1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط غير مستقيمية فإن المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC) .



(2) ليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



$$\sin \theta = \frac{CH}{AC} \quad \text{لدينا}$$

$$CH = AC \sin \theta \quad \text{إذن}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \cdot CH \quad \text{إذن}$$

استنتاج :

العدد $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

خاصية :

مساحة المثلث ABC هي العدد : $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

(3) يكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

(4) الجداء المتجهي والعمليات :

لتكن \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات و α عدد حقيقي.

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \quad \cdot$$

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \cdot$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad \cdot$$

III- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر.

L'expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct.

نعتبر المتجهتان $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

لدينا : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$= xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

استنتاج :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \\ z & z' \\ x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

أمثلة :

(1) $\vec{u}(1,2,1)$ و $\vec{v}(-1,0,1)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

(2) $A(1,0,1)$ ، $B(0,1,1)$ ، $C(1,1,0)$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

إنن :

$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

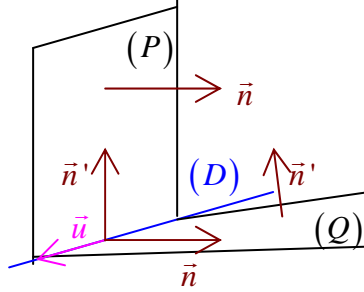
$$\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| = \sqrt{3}$$

إنن :

ومنه : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (وحدة القياس) هي مساحة المثلث ABC.

-IV تطبيقات الجداء المتجهي.

- 1- حساب مساحة المثلث.
- 2- معادلة مستوى معرف بـ 3 نقط غير مستقيمة.
- المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .
- 3- تقاطع مستويين.
- لتكن \vec{n} منظمية على (P) و \vec{n}' منظمية على (Q) .



إذا كانت \vec{n} و \vec{n}' غير مستقيمتين،
فإن المتجهة $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ هي متجهة موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q) .

4- مسافة نقطة عن مستقيم.

ليكن $D(A, \vec{u})$ مستقيما في الفضاء ξ المنسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
ولتكن B نقطة من الفضاء ξ ، و H المسقط العمودي لـ B على (D) .

$$\overline{AB} \wedge \vec{u} = (\overline{AH} + \overline{HB}) \wedge \vec{u} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \overline{HB} \wedge \vec{u}$$

$$\|\overline{AB} \wedge \vec{u}\| = \|\overline{HB} \wedge \vec{u}\| \quad \text{إذن:}$$

$$= \overline{HB} \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\overline{HB} = \frac{\|\overline{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن:}$$

$$d(B, (D)) = \frac{\|\overline{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن:}$$

خاصية:

الفضاء ξ منسوب إلى معلم م.م.

مسافة النقطة B عن المستقيم $D(A, \vec{u})$ هي:

$$d(B, (D)) = \frac{\|\overline{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

مثال:

$$A(2, 1, 0)$$

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و}$$

$$d(A, (D)) \quad \text{لنحسب}$$

$$C(0, 1, 0) \in (D) \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{و: } \vec{u}(1, 1, -1) \text{ متجهة موجهة لـ } (D).$$

$$d(A, (D)) = \frac{\|\overline{CA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن :}$$

$$\overline{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{وبما أن :}$$

$$\overline{CA} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{فإن :}$$

$$= 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{و :}$$

$$\|\overline{CA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{8} \quad \text{إذن :}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3} \quad \text{و :}$$

$$d(A, (D)) = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{إذن :}$$

تمرين تطبيقي :

تمرين 5 (سلسلة الهندسة الفضائية) :

-1 -a لدينا : $A(-3,0,0)$ ، $B(-1,0,-1)$ ، $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

لنحسب : $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \overline{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{إذن :}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{بمأن :}$$

فإن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل $x-2y+2z+d=0$.

-b وبما أن : $A \in (ABC)$

$$-3+0+0+d=0 \quad \text{فإن :}$$

$$d=3 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $x-2y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

-2 -a لدينا :

$$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1+2+3|}{\sqrt{1+4+4}} \quad \text{-b لدينا :}$$

$$= 2 = R$$

إذن : (ABC) مماس للكرة (S) .

-3 -a لدينا : $(Q): 2x+2y+z+3=0$

$$d(\Omega, (Q)) = \frac{|2-2+3|}{\sqrt{4+4+1}} \quad \text{إذن :}$$

إذن : (Q) متقاطع مع (S) وفق دائرة.

$$(2 \times 1) + (2 \times (-2)) + (1 \times 2) = 2 - 4 + 2 = 0 \quad \text{-b لدينا :}$$

إذن : $(ABC) \perp (Q)$
c- لدينا : (D) يمر من Ω و $(D) \perp (Q)$.

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

d- مركز الدائرة هو النقطة W تقاطع (D) و (Q) .
 لنحل النظام :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ 2x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$2(1 + 2t) + 2(-1 + 2t) + t + 3 = 0$$

$$9t + 3 = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

ومنه : $W \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-1}{3} \right)$ مركز الدائرة (ℓ) .

$$2^2 = 4 = \Omega W^2 + r^2 \quad \text{وبما أن :}$$

$$r^2 = 4 - 1 \quad \text{فإن :}$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

تمرين :

لدينا : $A(1, 0, 0)$ ، $B(0, 2, 1)$ ، $C(1, 2, 1)$.

1- أحسب الجداء $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ واستنتج معادلة المستوى (ABC) .

2- لتكن (S) فلكة حيث تقاطعها مع المستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

a- بين أن O تنتمي إلى (S) .

b- حدد معادلة الفلكة (S) علما أن : $H(0, 0, 3) \in (S)$

3- ليكن (P) المستوى المماس للفلكة (S) في H .

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

4- أحسب المسافة : $d(H, (AB))$