

# المنطق

حسن وراق

## التمرين 1

نعتبر العبارة (P) التالية :  $x^2 - xy + y^2 = 0$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$  : (P)

أ- اعط نفي العبارة (P) .

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

## التمرين 2

باستعمال الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس بين أن :

أ-  $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

ب-  $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$

بين بالترجع كلا من العبارات التالية :

أ-  $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n^2+1)^2}{4}$

ب-  $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na$

ج- لكل عدد صحيح طبيعي العدد :  $3^{2n} + 2^{6n-5}$  يقبل القسمة على 11 .

د- لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نضع العدد المكون من  $n$  رقم كلها تساوي 7 ( $a_1 = 7; a_2 = 77; a_3 = 777; \dots$ ) .

بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$

ت-  $\forall n \geq 24; \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2: n = 5p + 7q$

## التمرين 3

1- بين أن :  $p^2$  زوجي  $\Leftrightarrow p$  زوجي  $\forall p \in \mathbb{Z}$  .

2- بين أن كلا من العددين  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{5}$  ليس عددا جذريا .

3- بين أن  $(\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2; a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$  .

## التمرين 4

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  .

1- اعط نفي العبارة  $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$  .

2- حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$  ثم استنتج أن العبارة السابقة خاطئة .

## التمرين 5

بين أن :  $\forall x \in [-2; 2]; \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$  .

بين أن  $\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$

1- بين أن  $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) (|a| < 1 \text{ et } |b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|)$  .

2- بين أن :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \left( 2x + 4y = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 \right)$  .

3- بين أن  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ((xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1))$  .

4- بين أن :  $\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow |ac + bd| \leq 1$  حيث  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية .

## المنطق

حسن وراق

### التمرين 6

$a, b, c$  أعداد حقيقية. نعتبر المعادلات التالية :

$$(E_1): x^2 - 2ax + bc = 0$$

$$(E_2): x^2 - 2bx + ac = 0$$

$$(E_3): x^2 - 2cx + ab = 0$$

بين أنه على الأقل إحدى المعادلات السابقة تقبل حلا.

### التمرين 7

$f$  دالة عددية معرفة على المجال  $[0;1]$  بحيث  $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0;1]$ .

1- بين أن  $|f(1) - f(0)| \leq 1$ .

2- نفترض أن  $f$  تحقق  $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \forall (x, y) \in [0;1]^2$ .

بين أن  $|f(1) - f(0)| \geq 1$ .

3- بين أنه إذا كانت  $f$  تحقق العلاقتين (1) و (2) فإن  $(f(1) = 0 \text{ و } f(0) = 1)$  أو  $(f(1) = 1 \text{ و } f(0) = 0)$ .

4- بين أن  $f(0) = 0 \Rightarrow (\forall x \in [0;1]: f(x) = x)$ .

5- بين أن  $f(0) = 1 \Rightarrow (\forall x \in [0;1]: f(x) = 1 - x)$ .

### التمرين 8

1-  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^+$ .

أ- بين أن  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ .

ب- بين أن  $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$  et  $ab \leq \frac{1}{4}$ .

ج- بين أن  $a+b=1 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$ .

2- بين أن  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \left( \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c \Rightarrow |a| < c \text{ et } |b| < c \right)$ .

# المنطق

حسن وراق