تمرين رقم 1 :

أوجد نفي كل عبارة من العبارات التالية :

1 $(P_1):(\forall x\in\mathbb{R})\left(x^2-|x|+1>0 \text{ و } -1\le x\le 1\right)$

2 $(P_2):(\exists x\in\mathbb{R})\left(x\in\mathbb{Q} \text{ أو } \sqrt{\frac{x}{x+1}}\in\mathbb{Q}\right)$

3 $(P_3):\left[\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right]\left(a\le b\le c \text{ و } a+b+c\le 90\right)$

4 $(P_4):\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left[\left(x\ne 1 \text{ و } y\ne 1\right)\Rightarrow xy\ne 1\right)$

5 $(P_5):\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left[xy=0\Rightarrow\left(x=0 \text{ أو } y=0\right)\right.$

تمرين رقم 2 :

حدد نفي كل عبارة من العبارات التالية ، ثم اذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة :

1 $(P_1):(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})\left(x^2+xy+y^2=0\right)$

2 $(P_2):(\forall x\in\mathbb{R})\left(x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\right)$

3 $(P_3):\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)\left(\forall y\in\left]1,+\infty\right[\right)\left(\frac{x}{1+x^2}=\frac{y}{1+y^2}\Rightarrow x=y\right)$

4 $(P_4):(\forall x\in\mathbb{R})\left(\frac{1-|x|}{1+x^3}<1\right)$

5 $(P_5):(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})(x\ge y)$

تمرين رقم 4 :

1) بين أن العبارة P التالية خاطئة : $\forall x\in\left]0;1\right[\quad \frac{2x}{x^2(1-x^2)}<1$

2) بين أن الاستلزام التالي صحيح : $\forall a,b\in\mathbb{R}_+^*\ \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}\right)\Rightarrow\left(\left|\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right|=1\right)$

4) بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا : $2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}=x+y\Leftrightarrow(x=2 \text{ و } y=8)$

5) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad\left(x^3-x^2-x-2\le 0\right)\Rightarrow(x\le 2)$

6) بين أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left[(xy\ne 1 \text{ و } x\ne y)\Rightarrow\frac{x}{x^2+x+1}\ne\frac{y}{y^2+y+1}\right.$

7) بين أن : $\forall x\in[-2;2]\quad\sqrt{4-x^2}-x\le 2\sqrt{2}$

تمرين رقم 5 :

1) أ- باستعمال برهان بفصل الحالات بين أن : $\left[\frac{n^2}{3}\right]+\left[\frac{2(n+1)}{3}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{3}\right]$

ب - باستعمال برهان بالترجع استنتج أن : $\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{2k}{3}\right]=\left[\frac{n^2}{3}\right]$

2) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}): x-1-\sqrt{x^2-2x+5}<0$

تمرين رقم 6 :

لتكن a و b و x و y أعدادا حقيقية غير منعدمة. نعتبر العبارتين :

$$(P): ax+by=1$$

$$(Q): \frac{1}{x^2+y^2}\le a^2+b^2$$

بين أن : $P\Rightarrow Q$

تمرين رقم 7 :

باستعمال برهان بالترجع أثبت ما يلي :

1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2^n\ge n+1$

2) $\forall n\in\mathbb{N}\quad 7/\left(3^{2n}-2^n\right)$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 11/\left(3^{2n}+2^{6n-5}\right)$

4) لكل n من $\mathbb{N}$: $1.2+2.3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5) لكل $n\ge 1$ لدينا : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ :\ 1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

تمرين رقم 8 :

1) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 12/n^2\left(n^2-1\right)$

2) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 9/4^n+6n-1$

3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نضع : $u_n=\underbrace{7777\ldots\ldots\ldots\ldots 7}_{n7}$

أ - بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

ب - بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n}u_k=\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$