

مبادئ في المنطق ذ الرقبة Notion de Logique

(1) تمهيد :

أ- **المنطق الرياضي** اهتم أساها بدراسة الفكر التجريدي وطرق الاستدلال، حيث أن النظريات الرياضية ليست تجميع النتائج بدون روابط بينها، وإنما انطلاقا من نتائج تم قبولها كمكتسبات (نصوص صحيحة) يسمح "الاستدلال الرياضي" أو "المنطق" بالبرهان على نتائج أخرى. وهذا الاستدلال يتم وفق قواعد محددة وتسمى **قواعد المنطق** أو **القواعد المنطقية**.

ب- **الرياضيات تستعمل اللغة المتداولة** بالإضافة إلى رموز أو حروف : a و b و x و y و \dots ، $=$ ، \leq ، $\sqrt{\quad}$ ، ...
- النص الرياضي هو كل تجميع لكلمات وحروف ورموز.

(2) تعريف ومصطلحات

1-2. العبارات، الدوال العبارية

Propositions, Fonction propositionnelles

نعتبر النصوص الرياضية التالية :

$$3 \times 5 = 8 \quad - A_1$$

$$\sqrt{3} \text{ عدد لاجذري} \quad - A_2$$

$$x^2 + 1 \geq 2 \text{ حيث } x \in \mathbb{R} \quad - A_3$$

$$a + b \leq ab \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ إعدادا حقيقية.} \quad - A_4$$

ملاحظة : كل هذه النصوص الرياضية تحمل معنى

- المعنى الذي يحمله A_1 خاطئ
- المعنى الذي يحمله A_2 صحيح.
- النصان A_3 و A_4 يحتويان على متغيرات. ولا يمكن الحكم عليها أنها خاطئة أو صحيحة. فمثلا A_3 صحيحة من أجل $x = 2$
 A_4 خاطئة من أجل $x = \frac{1}{2}$

تعريف ①

العبارة " في المنطق " هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خاطئا.
" ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا".

أمثلة : من التلاميذ.

تعريف ②

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة.

أمثلة : من طرف التلاميذ.

ملاحظة : • إذا كانت الدالة العبارية تصبح صحيحة من أجل a نقول أن a تحقق الدالة العبارية $A(x)$.أو أن $A(x)$ تتحقق من أجل a • الدالة العبارية $A(x)$ تسمى أيضا خاصية للمتغير x .

2-2. الكميات **Les Quantificateurs****المكمم الوجودي**

تكن $A(x)$ دالة عبارية للمتغير x و E مجموعة غير فارغة.

نعتبر العبارة: $P : (\exists x \in E) : A(x)$

العبارة P تكون صحيحة فقط إذا وجد على الأقل x من E و x يحقق $A(x)$.

العبارة P تقرأ: يوجد على الأقل x من E حيث $A(x)$

أو: يوجد على الأقل x من E يحقق $A(x)$

ملاحظة: إذا كان كل عنصر من E لا يحقق $A(x)$

نقول أن $A(x)$ خاطئة

المكمم الكوني

نعتبر العبارة $Q : (\forall x \in E) : A(x)$

العبارة Q تكون صحيحة فقط إذا كانت كل عناصر E تحقق $A(x)$

العبارة Q تقرأ: مهما يكن x من E لدينا $A(x)$

أو: لكل x من E لدينا $A(x)$

أمثلة: $P_1 : x^2 \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

$P_2 : x + \frac{1}{x} = 2 ; \exists x \in \mathbb{R}$

$P_3 : x^2 + 1 = 0 ; \exists x \in \mathbb{R}$

$P_4 : x^2 + 3x + 1 > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

لدينا P_1 صحيحة

P_2 صحيحة

P_3 خاطئة

P_4 صحيحة

ملاحظة ① هناك عبارات بعدة كميات.

أمثلة:

$Q_1 : y = x^2 ; (\forall y \in \mathbb{R}^+) (\exists x \in \mathbb{R})$

$Q_2 : y = x^2 ; (\exists y \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in \mathbb{R})$

$Q_3 : y = |x+1| ; (\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}^+)$

$Q_4 : y < x ; (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R})$

$Q_5 : y = x^2 ; (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}^+)$

ملاحظة ② • إذا كانت الكميات من نفس الطبيعة فإن ترتيبها ليست له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة.
• إذا كانت الكميات من طبيعة مختلفة فلترتيبها أهمية قصوى في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة.

(3) العمليات المنطقية.**3-1. نفي عبارة.**

نفي عبارة P هو عبارة نرملها بـ \bar{P} أو $\neg P$ وتكون صحيحة إذا كانت P خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة.

جدول حقيقة عملية النفي.

العدد 1 يعني أن العبارة صحيحة
العدد 0 يعني أن العبارة خاطئة
يمكن أن نغير 1 بـ \bar{V} و \bar{F}
و 0 بـ \bar{V} و \bar{F}

P	$\neg P$
0	1
1	0

ملاحظة: $\neg(\neg A) = A$

أمثلة: اعط نفي العبارات التالية:

- $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 < 0$ - A_1
 $(\exists x \in \mathbb{R}) ; x^2 = 1$ - A_2
 $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) ; x^2 + y^2 = 1$ - A_3
 $(\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) ; x + y = xy$ - A_4
 $(\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists y \in \mathbb{R}^*) ; y = \frac{1}{x}$ - A_5
 $(\exists x \in \mathbb{N}) (\forall y \in \mathbb{Z}) ; xy \geq 0$ - A_6

خلاصة:

نفي العبارة $(\forall x \in E): A(x)$ هو $(\exists x \in E): \bar{A}(x)$
 نفي العبارة $(\exists x \in E): A(x)$ هو $(\forall x \in E): \bar{A}(x)$
 نفي العبارة $(\forall x \in E)(\forall y \in F): A(x, y)$ هو $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \bar{A}(x, y)$
 نفي العبارة $(\exists x \in E)(\forall y \in F): A(x, y)$ هو $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \bar{A}(x, y)$

ملاحظة: " الاستدلال بالمثال المضاد "

لكي نبرهن على أن عبارة ما A خاطئة، يكفي أن نبين نفيها \bar{A} صحيحة. وخصوصا بالنسبة للعبارة: $P: (\forall x \in E): A(x)$

لكي نبين أن P خاطئة: يمكن أن نبين أن $\bar{P}: (\exists x \in E): \bar{A}(x)$

مثال 1: بين أن العبارة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 3x - 1 > 0$ خاطئة.

مثال 2: بين أن العبارة: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x} + x > 2$ خاطئة.

3-2. الفصل المنطقي Disjonction logique**- فصل عبارتين**

تعريف فصل العبارتين A و B هو العبارة التي نرملها بـ $(A \text{ أو } B)$ والتي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين A أو B صحيحة.
جدول حقيقة العبارة $(A \text{ أو } B)$.

A	B	B أو A
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

أمثلة : $P_1 : (2 \in \mathbb{Q} \text{ أو } \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0)$

$P_2 : (\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \text{ أو } \forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1)$

$P_3 : (\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 < 0 \text{ أو } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x)$

العبرة P_1 صحيحة

P_2 صحيحة

P_3 خاطئة

3-3. العطف المنطقي Conjonction logique

- عطف عبارتين

تعريف عطف العبارتين A و B هو العبرة التي نرسم لها بـ $(A$ و $B)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A و B صحيحتين معاً.

جدول حقيقة العبرة A و B .

A	B	B و A
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة : $Q_1 : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0, \text{ و } (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 - 1 = 0)$

$Q_2 : (\exists x \in \mathbb{R} x^2 < 0, \text{ و } \forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, nm \geq n)$

$Q_3 : (\forall x > 0 ; x + \frac{1}{x} > 2 \text{ و } \exists x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x-1} = 1)$

Q_1 : صحيحة

Q_2 : خاطئة

Q_3 : خاطئة

4-3. الاستلزام المنطقي Implication logique

تمهيد : لتكن A و B عبارتين.

أتمم جدول الحقيقة التالي :

A	B	$\neg A$	$\neg A$ أو B
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

لاحظ أن العبرة $(\neg A$ أو $B)$ لا تكون خاطئة إلا إذا كانت A صحيحة و B خاطئة.

تعريف : العبارة $(\neg A \text{ أو } B)$ تسمى **استلزام** A و B .

ونكتب $A \Rightarrow B$

ونقرأ A تستلزم B .

أو إذا كانت A فإن B .

أو من A نستنتج B .

ملاحظة ① إذا كانت العبارة $(A \Rightarrow B)$ صحيحة

نقول إن B استنتاج منطقي للعبارة A .

② العبارتان $(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$ لا يحملان نفس المعنى.

③ نلاحظ أن العبارة $(A \Rightarrow B)$ لا تكون خاطئة إلا إذا كانت A صحيحة و B خاطئة.

ولكي نبين أن $(A \Rightarrow B)$ عبارة صحيحة

يكفي أن نبرهن على أنه إذا كانت A صحيحة فإن B صحيحة أيضا.

ونقول إن A شرط كافي لتحقيق B .

ملاحظة : إذا كان $(B \Rightarrow C)$ و $(A \Rightarrow B)$

فإن $A \Rightarrow C$

3-5- التكافؤ المنطقي

لتكن A و B عبارتين

أتمم جدول الحقيقة التالي

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$(B \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

لاحظ أن العبارة $(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$ لا تكون صحيحة إلا إذا كانت A و B صحيحتين معا أو خاطئتين معا

تعريف

تكافؤ العبارتين A و B هو العبارة $(A \Rightarrow B)$ و $(B \Rightarrow A)$ والتي نرمز لها ب $(A \Leftrightarrow B)$

4 القوانين المنطقية

① قوانين مورگان Lois de MORGAN

$$\neg(B \text{ و } A) \Leftrightarrow \neg A \text{ أو } \neg B$$

$$\neg(B \text{ أو } A) \Leftrightarrow \neg A \text{ و } \neg B$$

② قانون التكافؤات المتتالية

1- لتكن A و B و C ثلاث عبارات

إذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فإن $(A \Leftrightarrow C)$

2- لكي نبرهن على أن العبارة P صحيحة يكفي أن نبرهن على صحة التكا فؤات المتتالية

$$(P_n \Leftrightarrow Q) \text{ و } \dots \text{ و } (P_1 \Leftrightarrow P_2) \text{ و } (P \Leftrightarrow P_1)$$

حيث Q عبارة صحيحة ثم نستنتج أن العبارة $(P \Leftrightarrow Q)$ و بالتالي العبارة P صحيحة

$$1 - \text{ بين أن } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a=0 \text{ أو } b=0$$

$$2 - \text{ بين أن } \sqrt{x+6} = x \Leftrightarrow x = 3$$

$$3 - \text{ بين أن } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |x - y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$$

$$4 - \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } \sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

أمثلة

③ قانون الاستلزام المضاد للعكس.

الإستلزام $(A \Rightarrow B)$ يسمى الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام $(B \Rightarrow A)$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{بين أن}$$

أمثلة : بين أن

$$-1 \quad (\forall \varepsilon > 0) : |a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$$

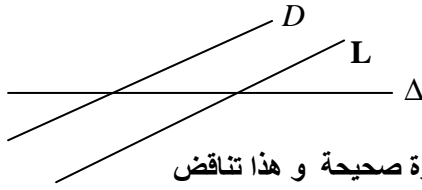
$$-2 \quad a + b > 2c \Rightarrow a > c \text{ أو } b > c$$

$$-3 \quad (x \neq 2 \text{ و } y \neq 2) \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

-4

④ قانون الخلف (الاستدلال بالخلف)

Raisonnement par l'absurde



مثال : نعتبر المستقيمات D و Δ و L حيث :

D يقطع Δ في النقطة I و $D // L$

بين أن L يقطع Δ

تعريف للبرهنة على أن العبارة Q صحيحة

نفترض أنها خاطئة ونبين أن $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ حيث P عبارة صحيحة و هذا تناقض

تطبيق بين أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

⑤ الاستدلال بفصل الحالات

مثال 1 : بين أن العدد $n^3 - n$ قابل للقسمة على 3 لكل عدد صحيح طبيعي n .

مثال 2 : بين أن العدد $n^3 - n$ عدد زوجي.

مثال 3 : حل في \mathbb{R} المعادلة : $mx^2 + 2x + 1 = 0$ ، m بارامتر حقيقي.

مثال 4 . حل في \mathbb{R} المتراجحة $1 - \frac{x}{4} > \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

مثال 5 . حل في \mathbb{R} المتراجحة $|x - 1| + 2x - 3 \geq 0$

⑥ الاستدلال بالترجع.

نعتبر العبارة $P(n)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

إذا وجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث $P(n_0)$ عبارة صحيحة و $\forall n \geq n_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

فإن العبارة $P(n)$ صحيحة لكل $n_0 \leq n$

ويسمى هذا الإستدلال الرياضي الإستدلال بالترجع او البرهان بالترجع

تطبيقات 1- بين ان $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1+na$

2- بين ان $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1+3+3^2+\dots+3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

3- بين ان $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$