SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

# الدورة الاستدراكية 2005

## أسئلة :

1) المعادلة المميزة هي : $r^2+r-6=0$ ، $\Delta=25 \Leftarrow r_1=-3$ و $r_2=2$.

حلول المعادلة التفاضلية هي $y=\alpha e^{-3x}+\beta e^{2x}$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$.

2) $1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},\frac{-\pi}{4}\right] \Leftarrow Z=\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]$.

3) نضع $u(x)=\ln(1+Cos(x)) \Leftarrow u'(x)=\frac{-Sin(x)}{1+Cos(x)}$

$$v'(x)=Cos(x) \Leftarrow v(x)=Sin(x)$$

إذن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos(x)\ln(1+Cos(x))\,dx=\left[Sin(x)\ln(1+Cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin^2(x)}{1+Cos(x)}dx$$

$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-Cos(x)\,dx=\left[x-Sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

4)ملاحظة: $(u_n)$ عبارة عن مجموع متتاليتين، إحداهما حسابية$(v_n=n)$ و الأخرى هندسية $\left(w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

لدينا إذن

$$S_n=1+2+3+...+n+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+...+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n(n+1)+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

## التمرين الأول :

1) $d(\Omega,(P))=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\le r \Leftarrow (P)$ و $(S)$ يتقاطعان وفق دائرة.

2) مركز الدائرة هو $H$ المسقط العمودي للنقطة $\Omega$ على المستوى $(P)$

ليكن$(\Delta)$ المستقيم المار من $\Omega$والعمودي على $(P)$، إذن $\vec{n}(1,0,-1)$ المنظمية على$(P)$موجهة ل$(\Delta)$.

$H$ هي تقاطع $(\Delta)$و$(P)$، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة:

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=-t\\ x-z+1=0\end{cases} \Rightarrow 1+t+t+1=0$$

إذن $t=-1$ و منه $H(0,0,1)$.

شعاع الدائرة هو $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{2}$ .

## التمرين الثاني:

1) $(1-i)^2=-2i$ .

2) نحسب المميز المختصر: $\Delta'=(1+2i)^2+(3-6i)=-2i=(1-i)^2$

إذن $z_1=3i$ و $z_2=2+i$ .

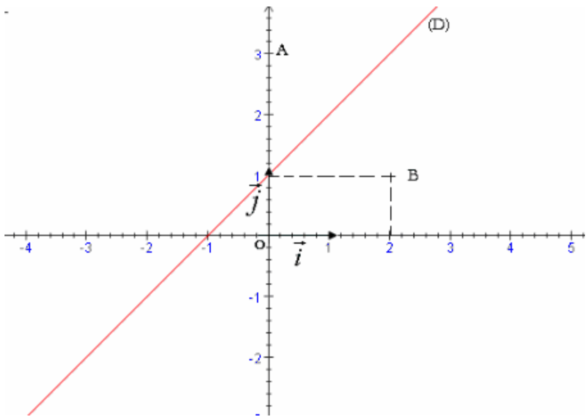
3) لدينا $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow AM=BM$ .

إذن $(D)$ مجموعة النقط $M$ هي واسط القطعة $[AB]$ .

**طريقة تحليلية:** نضع $z=x+iy$ . إذن $|z-3i|=|z-2-i| \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x-y+1=0$

إذن $(D)$ مجموعة النقط $M$ هي المستقيم الذي معادلته $(D): x-y+1=0$




## التمرين الثالث :

1) ليكن $A$ الحدث : "الحصول على كرة بيضاء" ، إذن $p(A)=\frac{4}{6}$ .

2) ليكن $B$ الحدث :" الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط"، $p(B)=C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$ .

3) أ- ليكن $C$ الحدث :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل"، إذن $\overline{C}$ :" الحصول على $n$ كرة سوداء"

$p(\overline{C})=\left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftarrow p(C)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . (احتمال سحب كرة سوداء هو $\frac{1}{3}$).

ب- لدينا $p\geq 0.999 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\geq 0.999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 0.001$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq \log 10^{-3}$

$\Leftrightarrow -n.\log 3\leq -3$

$\Leftrightarrow n\geq \frac{3}{\log 3}\approx 6.25$

إذن ، العدد الأدنى من السحبات هو 7.

# مسألة :

1) أ- $\lim\limits_{0^+} \frac{x}{2-x} = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{2^-} f(x) = +\infty$ .

ب- لكل $x$ من $]0,2[$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\frac{x}{2-x}} = \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x(2-x)}$$

ج- جدول التغيرات:

| x | 0 | | 2 |
|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ | + | ‖ |
| f(x) | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ |

2) أ- **تذكير :** $A(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى $C_f$ $\Leftrightarrow$ $f(2a-x) = 2b - f(x)$ و $2a - x \in D_f$

نبين أن $f(2-x) = -f(x)$ : $0 \prec x \prec 2 \Rightarrow 0 \prec 2-x \prec 2 \Rightarrow 2-x \in D_f$

و $f(2-x) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = -f(x)$ إذن $A(1,1)$ مركز تماثل للمنحنى.

ب- معادلة $(D)$ هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و $f'(1) = 2$ ، إذن : $(D) \;:\; y = 2x - 2$ .

3) أ- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \frac{3}{2} \approx -0.4 \prec 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = \ln(7) - \frac{7}{4} \approx 0.19 \succ 0$.

ب- الدالة $\varphi$ متصلة على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ (فرق دالتين متصلتين) و $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) . \varphi\left(\frac{7}{4}\right) \prec 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية فإنه يوجد على الأقل عدد $\alpha$ من $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ حيث $\varphi(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$ .

**التأويل المبياني** : المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول) في النقطة $I(\alpha, \alpha)$ .

3) أ- $f$ دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,2[$ إذن فهي تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ .

4) ب- $f$ تقابل من $]0,2[$ نحو $IR$ و $\forall x \in IR, \forall y \in ]0,2[ \quad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ .

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2-y}\right)$$

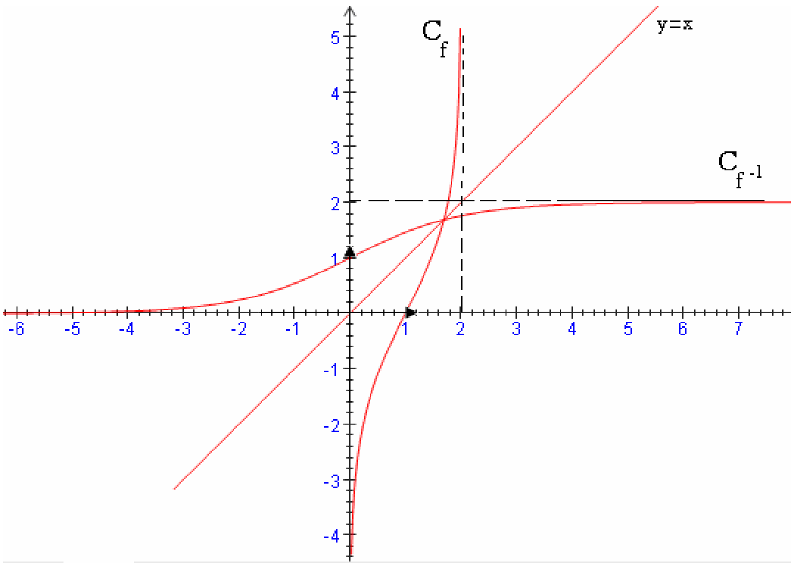
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{2-y}$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - ye^x = y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{1+e^x}$$

إذن : $f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$ $\quad \forall x \in IR,$

5)المنحنى :




6) أ- لدينا $\frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftarrow \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln|1+e^x|\right]_0^\alpha$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln 2$$

<u>نحسب $e^\alpha$ بدلالة $\alpha$:</u> لدينا $f(\alpha)=\alpha$ يعني $\ln\frac{\alpha}{2-\alpha}=\alpha$

يعني $\frac{\alpha}{2-\alpha}=e^\alpha$

إذن $1+e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$

و بالتالي : $\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx = -\ln(2-\alpha)$.

ب- لتكن $S$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين $(C_f)$ و$(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم.

إذن : $S = 2\int_0^\alpha \left[f^{-1}(x)-x\right]dx$ (بوحدة قياس المساحات)

$$= 4\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx - 2\int_0^\alpha x\,dx$$

$$= -4\ln(2-\alpha) - \alpha^2$$

**طريقة ثانية :** $S = \int_0^\alpha f^{-1}(x)dx - \int_1^\alpha f(x)dx$.

لدينا : $\int_0^\alpha f^{-1}(x)dx = -2\ln(2-\alpha)$. نحسب $\int_1^\alpha f(x)dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء:

نضع $u(x)=\ln\frac{x}{2-x} \Rightarrow u'(x)=\frac{2}{x(2-x)}$.

$v'(x)=1 \Rightarrow v(x)=x$.

إذن : $\int_1^\alpha f(x)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{2}{2-x}dx$

$= \alpha \ln\left(\dfrac{\alpha}{2-\alpha}\right) - \left[-2\ln(2-x)\right]_{1}^{\alpha} = \alpha^{2} + 2\ln(2-\alpha)$ (لأن $f(\alpha) = \alpha \Leftarrow \ln\dfrac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha$)

و منه : $S = -4\ln(2-\alpha) - \alpha^{2}$ (بوحدة قياس المساحات).