الثانية بكالوريا علوم تجريبية	تصحيح امتحان البكالوريا الدورة العادية 10/ يونيو/2006	الأستاذ : الحيان

✍ التمرين الأول :

1. المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(*) \quad : \quad y''-6y'+9y=0$ هي : $(E_c) \quad : \quad r^2-6r+9=0$.

ولدينا : $r^2-6r+9=0 \Leftrightarrow (r-3)^2=0 \Leftrightarrow r=3$. ومنه نستنتج أن الحل العام للمعادلة التفاضلية $(*)$ هو :

$y_1=(\alpha x+\beta)e^{3x}$ حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

2. نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E) \quad : \quad y''-6y'+9y=2e^{3x}$.

أ- لدينا 3 حل مزدوج للمعادلة المميزة (E_c) . إذن نبحث عن حل خاص y_0 للمعادلة التفاضلية (E) على شكل : $y_0=kx^2e^{3x}$ ، حيث $k\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$y_0'=\left(kx^2e^{3x}\right)'=2kxe^{3x}+3kx^2e^{3x}=(2+3x)kxe^{3x}$$

و

$$y_0''=\left[\left(2kx+3kx^2\right)e^{3x}\right]'=(2k+6kx)e^{3x}+3\left(2kx+3kx^2\right)e^{3x}=\left(2+6x+6x+9x^2\right)ke^{3x}$$

$$y_0''=\left(2+12x+9x^2\right)ke^{3x}$$

لدينا y_0 حل للمعادلة التفاضلية (E) يكافئ على التوالي :

$$\begin{aligned}
y_0''-6y_0'+9y_0=2e^{3x} &\Leftrightarrow \left(2+12x+9x^2\right)ke^{3x}-6(2+3x)kxe^{3x}+9kx^2e^{3x}=2e^{3x}\\
&\Leftrightarrow \left[2+12x+9x^2-12x-18x^2+9x^2\right]ke^{3x}=2e^{3x}\\
&\Leftrightarrow 2ke^{3x}=2e^{3x}\\
&\Leftrightarrow k=1
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $y_0=x^2e^{3x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

ب- الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو : $\boxed{y=y_0+y_1=x^2e^{3x}+(\alpha x+\beta)e^{3x}}$ ، حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

✍ التمرين الثاني :

نعتبر المعادلة التالية : $(E) \quad : \quad z\in\mathbb{C} \quad ; \quad z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0$.

نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث : $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$.

1. المميز المختصر للمعادلة (E) هو : $\Delta'=\left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2-8i=3\times 2i-8i=-2i=(1-i)^2$. إذن :

للمعادلة (E) حلين عقديين هما : $z=\sqrt{3}(1+i)+1-i=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$

أو : $z=\sqrt{3}(1+i)-(1-i)=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

وبما أن: $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$ ، فإن : $\boxed{z_1=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}$ و $\boxed{z_2=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

2. أ- لدينا :

$$z_1^2=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2i\left(1+\sqrt{3}\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)-\left(-1+\sqrt{3}\right)^2$$

$$z_1^2=\left(4+2\sqrt{3}\right)+4i-\left(4-2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+4i=\boxed{4\left(\sqrt{3}+i\right)}$$

ولدينا :

$$i\overline{z_1}=i\left[\overline{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)}\right]=i\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right]=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)=z_2$$

وبالتالي فإن : $\boxed{z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)}$ و $\boxed{z_2=i\overline{z_1}}$.

ب- لدينا : $4\left(\sqrt{3}+i\right)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$.

جـ- لدينا : $z_1^2=4\left(\sqrt{3}+i\right)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$. إذن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{2}\right]$ حيث : $k=0$ أو $k=1$.

أي: $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}+\pi\right]=-\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$. وبما أن : $\Re e\left(z_1\right)>0$ ، فإن :

$$\boxed{z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]}\ .$$

ولدينا : $z_2=i\,\overline{z_1}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\overline{\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$.

$$\boxed{z_2=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]}\ .$$

3. في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين : $A\left(z_1\right)$ و $B\left(z_2\right)$. لدينا :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \arg\left(z_2\right)-\arg\left(z_1\right) && [2\pi]\\ &\equiv \frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12} && [2\pi]\\ \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \frac{\pi}{3} && [2\pi]\end{aligned}$$

ومنه فإن : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\ [2\pi]$ أي : $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$.

ولدينا : $\boxed{OA=OB}$ $\frac{OB}{OA}=\frac{\left|z_2\right|}{\left|z_1\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1\Rightarrow$. إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع.

✍ التمرين الثالث : ✍ ☞

نعتبر ، في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقطة $A\left(1,-1,3\right)$ والمستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $x-y+3z=0$.

1. أ- لدينا : (OA) هو المستقيم المار من النقطة $O\left(0,0,0\right)$ والموجه بالمتجهة $\overrightarrow{OA}\left(1,-1,3\right)$.

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$. لدينا :

$$\begin{aligned}M\left(x,y,z\right)\in(OA) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ و } \overrightarrow{OA} \text{ مستقيميتين}\\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OA}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=3t\end{cases}\ /\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم (OA) .

ب- لدينا : $(OA)\perp(\mathrm{Q})$. إذن : $\overrightarrow{OA}\left(1,-1,3\right)$ متجهة منظمية على المستوى (Q).

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$. لدينا :

$\overrightarrow{AM}\left(x-1,y+1,z-3\right)$ و $\overrightarrow{OA}\left(1,-1,3\right)$. إذن :

$$M(x,y,z)\in(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA}=0$$
$$\Leftrightarrow 1\times(x-1)-1\times(y+1)+3\times(z-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+3z-11=0$$

وبالتالي فإن : $\boxed{(Q) \ : \ x-y+3z-11=0}$.

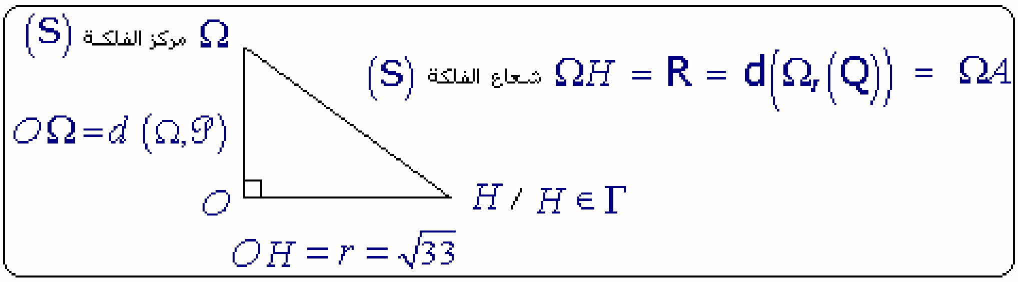
جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,-1,3)$ متجهة منظمية على كل من المستويين $(\mathcal{P})$ و (Q) . إذن : $\boxed{(\mathcal{P})//(Q)}$.

2. نعتبر الفلكة (S) المماسة للمستوى (Q) في النقطة A والتي يقطعها المستوى $(\mathcal{P})$ وفق الدائرة Γ التي مركزها O وشعاعها $r=\sqrt{33}$. ليكن Ω و R على التوالي مركز وشعاع الفلكة (S) .

أ- لدينا : A هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (Q) و $(OA)\perp(Q)$. إذن : (OA) و $(A\Omega)$ منطبقان ، ومنه فإن : $\Omega(a,b,c)\in(OA)$. و حسب السؤال (1 . أ-) ، لدينا : $\begin{cases} t=a \\ \boxed{b=-a} \\ \boxed{c=3a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}$.

ب- الفلكة (S) مماسة للمستوى (Q) في النقطة A . إذن : المسافة بين المركز Ω و المستوى (Q) تساوي شعاع الفلكة (S) . أي : $\boxed{\Omega A = d(\Omega,(Q))=R}$.

المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة Γ التي مركزها O وشعاعها $r=\sqrt{33}$. إذن : O هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى $(\mathcal{P})$. ومنه فإن المثلث ΩOH قائم الزاوية في O ، حيث : H نقطة من الدائرة Γ . ولدينا : $d(\Omega,(\mathcal{P}))<R$ و $r^2=R^2-\left[d(\Omega,(\mathcal{P}))\right]^2$.



ومنه فإن : $\sqrt{33}^2=\Omega A^2-\Omega O^2$. أي : $\boxed{\Omega A^2-\Omega O^2=33}$.

ولدينا: $\overrightarrow{\Omega O}(-a,-b,-c)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(1-a,-1-b,3-c)$. إذن :

$$\Omega A^2-\Omega O^2 = (1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2-a^2-b^2-c^2$$
$$\Omega A^2-\Omega O^2 = 1-2a+\cancel{a}^2+1+2b+\cancel{b}^2+9-6c+\cancel{c}^2-\cancel{a}^2-\cancel{b}^2-\cancel{c}^2$$
$$\Omega A^2-\Omega O^2 = \boxed{11-2(a-b+3c)}$$

وعليه فإن : $11-2(a-b+3c)=33$. وبالتالي فإن : $\boxed{a-b+3c=-11}$.

جـ- نعلم أن : $b=-a$ و $c=3a$ و $\Omega(a,b,c)$ و $R=\Omega A$. إذن : $\Omega(a,-a,3a)$ و :

$\Omega A^2-\Omega O^2=11-2(a-b+3c)=11-2(a+a+9a)=11-22a$ و $\Omega A^2-\Omega O^2=33$.

ومنه نستنتج أن : $11-22a=33$. أي : $\boxed{a=-1}$. وبالتالي فإن : $\boxed{\Omega(-1,1,-3)}$.

ولدينا : $\overrightarrow{\Omega A}(2,-2,6)$. إذن : $R=\Omega A=\sqrt{2^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$. $\boxed{R=2\sqrt{11}}$.

المسألة :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1. أ- ليكن $x\in[0,+\infty[$. لدينا : $g'(x)=[\ln(1+x)-x]'=\frac{(1+x)'}{1+x}-1=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$.

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad g'(x)=-\frac{x}{1+x}<0$. ومنه فإن g دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

ب- لدينا : g دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$. إذن : $\forall x\in[0,+\infty[\quad : \quad x\geq 0\Rightarrow g(x)\leq g(0)$

وبما أن : $g(0)=0$ ، فإن : $\boxed{\forall x\in[0,+\infty[\quad : \quad g(x)\leq 0}$.

2. . لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad g(x)<0$ لأن g دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

و لدينا : $g(x)=\ln(1+x)-x$. إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad g(x)<0$.

ومنه فإن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad \ln(1+x)<x$.

ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا : $x>0\Rightarrow 1+x>1\Rightarrow \boxed{\ln(1+x)>0}$. وبالتالي فإن :

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad 0<\ln(1+x)<x}$$

II- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. وليكن $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. تحديد D حيز تعريف الدالة f : لدينا : $D=\left\{x\in\mathbb{R} \quad / \quad \frac{x+1}{x-1}>0 \quad \text{و} \quad x-1\neq 0\right\}$.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

إذن : $\boxed{D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$.

2. أ- لدينا : D مجموعة متماثلة بالنسبة للصفر . أي : $\boxed{\forall x\in D \quad : \quad -x\in D}$.

ليكن $x\in D$. لدينا : $f(-x)=-x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-x-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x)$.

إذن : f دالة فردية . <u>تذكر أن :</u> $\boxed{\forall a>0 \quad ; \quad \forall b>0 \quad : \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$. إذن : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0$. ومنه فإن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{+\infty}$$.

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ $\left('\dfrac{2}{0^+}'\right)$ إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{+\infty}$.

3. أ- ليكن $x\in D$. لدينا :

$$f'(x)=\left[x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'=1+\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}=1+\frac{\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=1-\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x^2-1-2}{x^2-1}=\boxed{\frac{x^2-3}{x^2-1}}$$

ب- لدينا : $f\left(\sqrt3\right)=\sqrt3+\ln\left(\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}\right)=\sqrt3+2\ln\left(\dfrac{\sqrt3+1}{2}\right)$ و $f\left(-\sqrt3\right)=-\sqrt3-2\ln\left(\dfrac{\sqrt3+1}{2}\right)$.

نعطي جدول تغيرات الدالة f على D (في السؤال ، نريد فقط جدول تغيرات الدالة f على $]1,+\infty[$).

x	$-\infty$		$-\sqrt3$		-1	1		$\sqrt3$		$+\infty$
x^2-3		$+$	0	$-$	||	||	$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	||	||	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt3\right)$	$\searrow$	$-\infty$ ||	|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt3+2\ln\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا f تزايدية قطعا على المجال $\left[\sqrt3,+\infty\right[$ وتناقصية قطعا على المجال $\left]1,\sqrt3\right]$.

4. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{0}$. إذن : المستقيم $(\Delta):\ \boxed{y=x}$ مقارب مائل للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

ب- لدينا : $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$: $\forall x\in D$. إذن : لكل $x\in D$ ، لدينا :

$$x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow\frac{2}{x-1}>0\Rightarrow1+\frac{2}{x-1}>1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$$

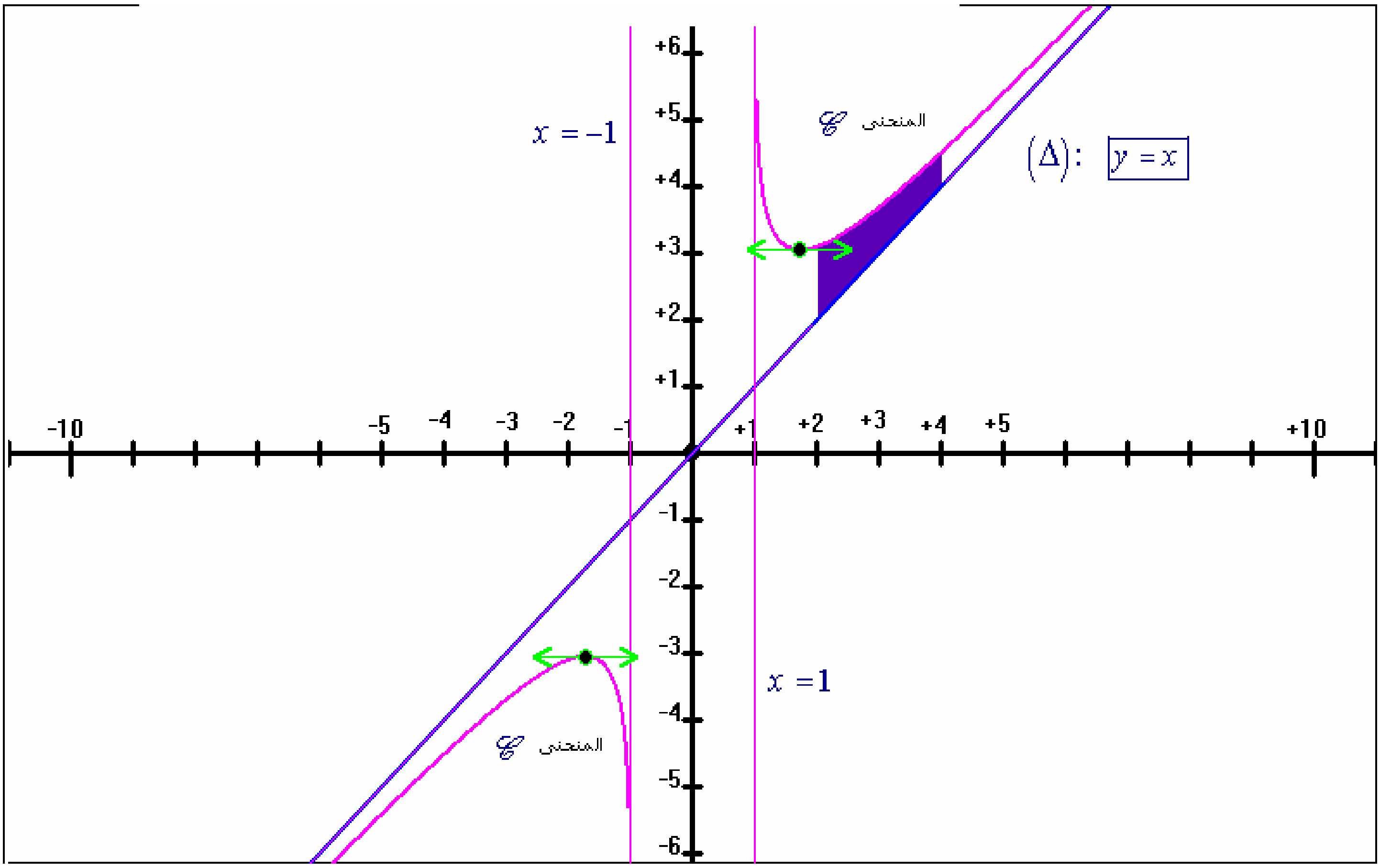
$$x<-1\Rightarrow x-1<-2\Rightarrow-1<\frac{2}{x-1}<0\Rightarrow0<1+\frac{2}{x-1}<1\Rightarrow0<\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$$

<u>خلاصة :</u> $\boxed{\forall x\in\left]1,+\infty\right[\ :\ \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0}$ و $\boxed{\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\ :\ \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0}$

جـ- حسب السؤال السابق ، لدينا : $\mathscr{C}$ يوجد **فوق** (Δ) على المجال $]1,+\infty[$.

$\mathscr{C}$ يوجد **تحت** (Δ) على المجال $]-\infty,1[$.

5. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$: (نعطي : $\sqrt3\approx1{,}7$ و $f\left(\sqrt3\right)\approx3$)



6. أ- نضع : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]'=-\dfrac{2}{x^2-1} \end{cases}$.

لدينا : u و v متصلتين على المجال $[2,4]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $]2,4[$. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx &= \int_2^4 u'(x)\times v(x)\,dx \\
&= \left[u(x)\times v(x)\right]_2^4-\int_2^4 u(x)\times v'(x)\,dx \\
&= \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4-\int_2^4-\frac{2x}{x^2-1}dx \\
&= 4\ln\left(\frac{5}{3}\right)-2\ln(3)+\int_2^4\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx \\
&= 4\ln(5)-4\ln(3)-2\ln(3)+\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^4 \\
&= 4\ln(5)-6\ln(3)+\ln(15)-\ln(3) \\
&= 4\ln(5)-7\ln(3)+\ln(5)+\ln(3) \\
\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx &= 5\ln(5)-6\ln(3)
\end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $\mathscr{C}$ والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي : $x=2$ و $x=4$ و $y=x$ هي :

$$A=\int_2^4 \left|f(x)-x\right|dx=\int_2^4\left|\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right|dx=\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln(5)-6\ln(3)\quad (u.a.)$$

ولدينا : $(u.a.)=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=1cm^2$. إذن : $A=5\ln(5)-6\ln(3)\approx 1.4555158301618437246323252$

وبالتالي فإن : $\boxed{A\approx 1.45cm^2}$.

☜ III- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; u_n=f(n)-n=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

1. أ- نعلم أن $\frac{n+1}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$. إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$.

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. لدينا :

$$n\leq n+1\Rightarrow n-1\leq n\Rightarrow \frac{1}{n-1}\geq\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{2}{n-1}\geq\frac{2}{n}\Rightarrow 1+\frac{2}{n-1}\geq 1+\frac{2}{n}\Rightarrow \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\geq\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\Rightarrow u_n\geq u_{n+1}$$

إذن : $(u_n)_{n\geq 2}$ **<u>متتالية تناقصية</u>** .

2. أ- نعلم أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\;:\; 0<\ln(1+x)<x$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; n\geq 2\Rightarrow n-1>0\Rightarrow\boxed{\frac{2}{n-1}>0}$.

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; 0<\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)<\frac{2}{n-1}$.

ومنه فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; 0<u_n<\frac{2}{n-1}}$.

ب- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\} \;:\; 0<u_n<\frac{2}{n-1}$.

و : $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}0=0$.

إذن : حسب مصاديق التقارب ، $(u_n)_{n\geq 2}$ <u>متتالية متقاربة</u> و لدينا : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$.

<u>تذكير :</u>

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ متتاليات عددية و N عدد طبيعي بحيث : $N\geq n_0$

إذا كان : $\forall n\geq N \;:\; u_n\leq v_n\leq w_n$ و $l\in\mathbb{R}$ ، بحيث : $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim_{n\to+\infty}w_n=l$

فإن : $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية متقاربة و لدينا : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=l}$

📖 النهاية 📖