الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول:

1) أ- من أجل $n=0$: $U_0 = 1 \succ 0$. نفترض أن $U_n \succ 0$ إذن $U_n^3 \succ 0$ ومنه $U_{n+1} = \dfrac{U_n^3}{1+U_n^2} \succ 0$.

و بالتالي $U_n \succ 0$ لكل n من IN .

ب- لدينا $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-U_n^2(U_n+1)}{1+U_n^2} \prec 0$ إذن (U_n) تناقصية .

ج- (U_n) تناقصية و مصغورة ب0 ، فهي إذن متقاربة .

2) أ- لدينا $3U_n^2 + 1 \geq 3U_n^2$ إذن $\dfrac{U_n^3}{3U_n^2+1} \leq \dfrac{U_n^3}{3U_n^2}$ $(U_n^3 \succ 0)$ أي $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}U_n$ لكل n من IN .

ب- لدينا : $\begin{cases} U_n \leq \dfrac{1}{3}U_{n-1} \\ U_{n-1} \leq \dfrac{1}{3}U_{n-2} \\ \vdots \\ U_2 \leq \dfrac{1}{3}U_1 \\ U_1 \leq \dfrac{1}{3}U_0 \end{cases}$ نضرب طرفا بطرف (كل الأطراف موجبة) نجد $U_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ لكل n من IN

$-1 \prec \dfrac{1}{3} \prec 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ و لدينا $U_n \succ 0$ إذن $\lim U_n = 0$.

التمرين الثاني :

1) أ- $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|0+1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

ب- $S(\Omega, r)$ مماسة للمستوى (P) ، إذن $r=\sqrt{2}$ ومنه $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$

إذن معدلة ديكارتية للفلكة هي : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

2) أ- $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,1,-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A و**B** وC غير مستقيمية .

ب- لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC) ، إذن $(ABC): -x+z+d=0$

$B(0,3,-3) \in (ABC)$ إذن $d=3$ و منه $(ABC): x-z-3=0$.

3) أ- لدينا $d(\Omega,(ABC))=\frac{|0+1-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$ إذن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC).

ب- $\overrightarrow{\Omega C}(1,0,-1) \Leftarrow \Omega C=\sqrt{2}$ إذن $C\in(S)$ و لدينا $C\in(ABC)$

إذن : C هي نقطة تماس (S) و (ABC).

التمرين الثالث:

1) أ- $\Delta'=1 \Leftarrow z'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. لدينا إذن $\mathrm{Re}(z'')\succ 0$ أي $z'=z_2$ و $z''=z_1$.

ب- لدينا $z_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2) أ – لدينا $\frac{a-s}{b-s}=\frac{1-i}{-1-i}=i$ إذن $\frac{a-s}{b-s}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$.

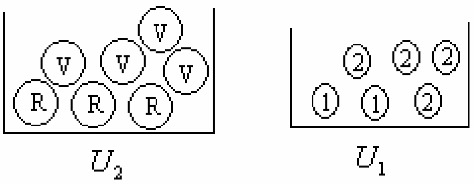
ب- لدينا $\frac{SA}{SB}=\left|\frac{a-s}{b-s}\right|=1$ إذن المثلث SAB متساوي الساقين رأسه S .

و $\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)=\arg\left(\frac{a-s}{b-s}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يعني أن المثلث SAB قائم الزاوية في S .

ج- لدينا $s=a+b$ يعني $aff(S)=aff(A)+aff(B)$ ومنه $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

إذن الرباعي $OASB$ متوازي الأضلاع ، و بما أن المثلث SAB قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه S فإن $OASB$ مربع.

التمرين الرابع :



1) $p(A)=\frac{1}{3}$ و $p(B)=\frac{4}{6}$

2) أ- $p(E_1)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}\right)=\frac{1}{7}+\frac{8}{21}=\frac{11}{21}$

و $p(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{2}{21}$.

ب- لدينا $p_{E_1}(A)=\frac{p(A\cap E_1)}{p(E_1)}$ و $p(A\cap E_1)=p(A)p_A(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$.

إذن $p_{E_1}(A)=\frac{3}{11}$.

التمرين الخامس:

1) أ- لدينا $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1$ لكل x من IR .

ب- $(x-1)^2+1\succ 0$ لكل x من IR إذن $D_f=IR$. $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$.

2) لدينا $f(2-x)=4-4x+x^2-4+2x+2=x^2-2x+2$ إذن $f(2-x)=f(x)$ لكل x من IR .

<u>**الاستنتاج:**</u> المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل (C) في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)\quad \forall x\in IR$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تماثل (C).

أو : لدينا $M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow y=f(x)$ و لتكن $M'(x',y')$ مماثلة M بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$ ،

إ ذن : $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=1 \\ y'=y \end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=y \end{cases}$. و بما أن $f(2-x)=f(x)$ فإن $y'=f(x')$

إذن $M'\in(C)$ و بالتالي (C) متماثل بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$.

3) أ- $f(x)=\ln\left[x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=\ln x^2+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$. وبما أن $x\in[1,+\infty[$

فإن $\ln x^2=2\ln x$ إذن $f(x)=\ln\left[x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x}=0$ ($\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\dfrac{0}{+\infty}=0$)

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

4) أ- $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ $\forall x\in IR$.

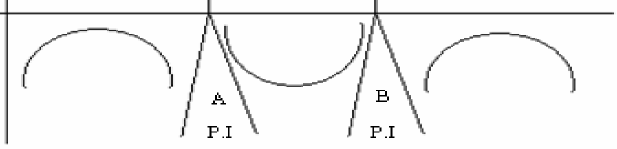
ب-

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) أ- $f''(x)=\dfrac{2(x^2-2x+2)-4(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}=\dfrac{2x(2-x)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$ $\forall x\in IR$.

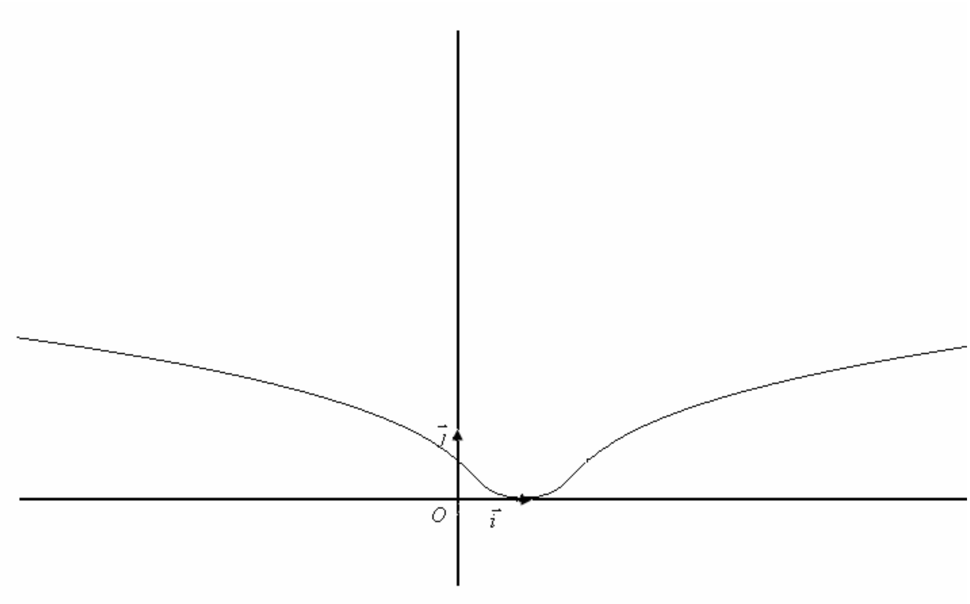
ب- نلخص إشارة $f''(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
(C)			A P.I		B P.I		



المنحنى له نقطتي انعطاف $A(0,\ln(2))$ و $B(2,\ln(2))$

6) المنحنى



7) أ- h متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ، فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$. $h([1,+\infty[)=[0,+\infty[$.

ب- لدينا : $y=h^{-1}(x)\Leftrightarrow x=h(y)$ $\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[$

إذن $x=\ln[(y-1)^2+1]\Leftrightarrow e^x=(y-1)^2+1\Leftrightarrow y-1=\pm\sqrt{e^x-1}$ $(x\succ 0\Leftrightarrow e^x-1\succ 0)$

و بما أن $y-1\succ 0$ فإن $y-1=\sqrt{e^x-1}$. إذن $\boxed{\forall x\in[0,+\infty[\ h^{-1}(x)=1+\sqrt{e^x-1}}$

8) أ- لدينا $f(x)=\ln[(x-1)^2+1]$ إذن $t=x-1\Rightarrow f(t)=\ln(t^2+1)$ و $dt=dx$.

و منه $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt$.

ب- نضع $u(t)=\ln(1+t^2)$ و $v'(t)=1$ فنجد $u'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ و $v(t)=t$ إذن :

$$\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt=[t\ln(1+t^2)]_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{2t^2}{1+t^2}dt=\ln 2-2\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

ج- لدينا $\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}$ إذن $\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_{-1}^0 1-\frac{1}{1+t^2}dt=[t-arctg(t)]_{-1}^0=1-\frac{\pi}{4}$.

د- لتكن A مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=1$ و $x=0$ ، إذن $A=\int_{-1}^0 f(x)dx=\ln(2)-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$ بوحدة قياس المساحة.