SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول :

1) $(S): (x-1)^2+y^2+(z+1)^2-1=0 \;\Leftarrow\; \Omega(1,0,-1)$ مركز الفلكة و $r=1$ شعاعها.

2) $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{1+4+4}}=1=r \;\Leftarrow\; (P)$ مماس للفلكة (S).

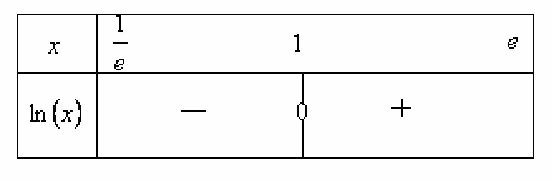
3) $H(a,b,c)$ نقطة تماس (P) و (S) $\Leftarrow$ H هي تقاطع (Δ) العمودي على (P) المار من Ω مع المستوى (P)

إذن $\vec{n}(1,-2,2)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ) ، ومنه : $\exists t \in IR / \begin{cases} a=1+t \\ b=-2t \\ c=-1+2t \\ a-2b+2c-2=0 \end{cases}$.

إذن $1+t-2(-2t)+2(-1+2t)-2=0 \Leftarrow t=\dfrac{1}{3} \Leftarrow \boxed{H\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)}$

التمرين الثاني :

(1



x	$\frac{1}{e}$		1		e
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

$$I=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\ln(x)dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\ln(x)dx \Leftarrow$$

و $\dfrac{1}{x}\ln(x)=\ln'(x)\ln(x) \Leftarrow I=\left[-\dfrac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\dfrac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{1}^{e}$ إذن $\boxed{I=1}$.

2) أ- $\dfrac{at+a+b}{1+t}=a+\dfrac{b}{1+t}=\dfrac{2t}{1+t} \Leftarrow \begin{cases} a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftarrow a=2$ و $b=-2$.

ب- $t=\sqrt{2+x} \Leftarrow x=t^2-2$ و $dx=2t\,dt \Leftarrow J=\displaystyle\int_2^3\frac{2t}{1+t}\,dt$.

باستعمال أ- : $J=\displaystyle\int_2^3 2-\frac{2}{1+t}\,dt=2\left[t-\ln|1+t|\right]_2^3=2+2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

التمرين الثالث :

1) أ- الحدث $\overline{A}$ هو :"سحب 3كرات لا تحمل الرقم1" $\Leftarrow p(\overline{A})=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5} \Leftarrow p(A)=\dfrac{4}{5}$

ب- الحدث S هو :"كرتان تحملان الرقم1وكرة تحمل الرقم2- **أو** كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم1- و كرة تحمل الرقم 0 **أو** كرة تحمل الرقم2 و كرة تحمل الرقم 2- و كرة تحمل الرقم 0 " إذن :

$$\boxed{p(S)=\frac{C_2^2C_1^1+C_1^1C_1^1C_1^1+C_2^1C_1^1C_1^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}}$$

2) نسمي p احتمال تحقق S ثلاث مرات بالضبط ، إذن $p = C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{625}$.

التمرين الرابع :

1) أ- لدينا $(4+i)^2=15+8i$.

ب- $d=\pm(4+i) \Leftarrow \Delta=(2-3i)^2+20(1+i)=15+8i$ (الجذرين المربعين ل Δ)

إذن $z'=\frac{-2+3i-4-i}{2}=-3+i$ و $z''=\frac{-2+3i+4+i}{2}=1+2i$.

2) أ- لدينا $\frac{c-a}{b-a}=\left[1,-\frac{\pi}{2}\right] \Leftarrow \frac{c-a}{b-a}=\frac{-1+4i}{-4-i}=\frac{(-1+4i)(-4+i)}{17}=-i$.

ب- $ABC \Leftarrow \frac{AC}{AB}=\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$ متساوي الساقين رأسه A .

$ABC \Leftarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ قائم الزاوية في A .

مسألة :

الجزء الأول :

1) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $f(x)=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty \Leftarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x-2\sqrt{x}}{x}=1-\frac{2}{\sqrt{x}}$

إذن ، f غير قابلة للاشتقاق في 0^+ .

3) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	2	↘	1	↗	$+\infty$

الجزء الثاني:

1) من أجل $n=0$: $1\le U_0=2\le 2$. العلاقة محققة

نفترض أن $1\le U_n\le 2$. بما أن f تزايدية على المجال $[1,2]$ فإن $f(1)\le f(U_n)\le f(2)$

إذن $1\le U_{n+1}\le 4-2\sqrt{2}$ و منه $1\le U_{n+1}\le 2$ ($4-2\sqrt{2}\le 2$)

و بالتالي : $1\le U_n\le 2$ لكل n من IN .

2) نبين بالترجع أن : $U_{n+1} \le U_n$ لكل n من IN .

من أجل $n=0$: $U_0 = 2$ و $U_1 = 4-2\sqrt{2}$ إذن $U_1 \le U_0$

نفترض أن $U_{n+1} \le U_n$ بما أن f تزايدية على المجال $[1,2]$ فإن $U_{n+2} \le U_{n+1} \Leftarrow f(U_{n+1}) \le f(U_n)$

و بالتالي : $U_{n+1} \le U_n$ لكل n من IN ، أي أن المتتالية (U_n) تناقصية .

3) المتتالية (U_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 1 فهي إذن متقاربة .

- نضع $I = [1,2]$. لدينا f متصلة على I و $f(I) = [1, 4-2\sqrt{2}] \subset I$ و (U_n) متقاربة ،

إذن نهايتها l تحقق $f(l) = l$ وهذا يعني أن $l - 2\sqrt{l} + 2 = l$ أي $\boxed{l=1}$.

الجزء الثالث :

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{x-2\sqrt{x}+2}\cdot\frac{x-2\sqrt{x}+2}{x} = 0$$

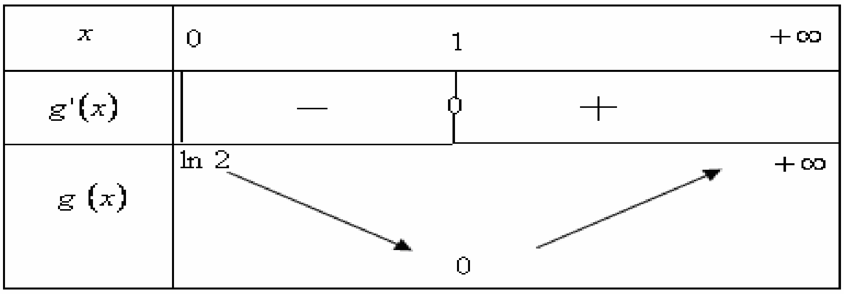
لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2\sqrt{x}+2}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{x-2\sqrt{x}+2} = 0$.

(C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

2) لدينا $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall x \in [0,+\infty[$.

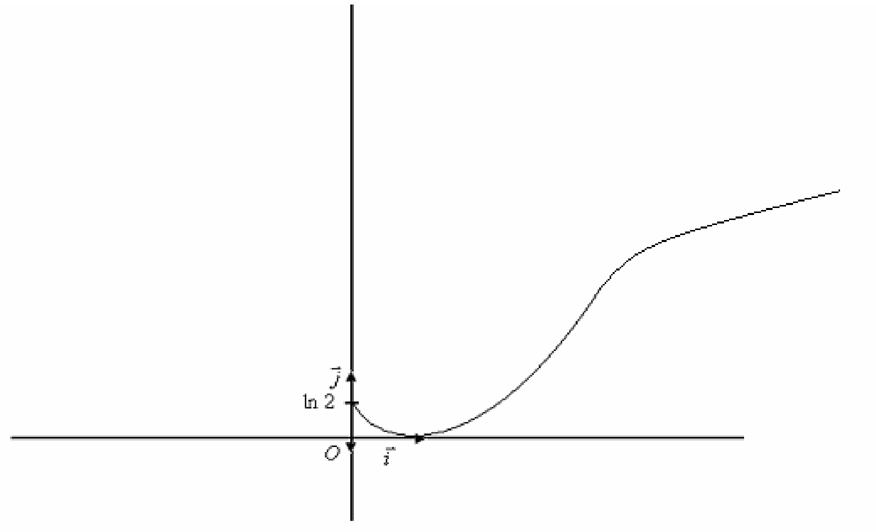
إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ ($f(x) > 0$ لكل x من IR^+).

و منه جدول إشارة $g'(x)$ هو :



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) المنحنى:



4) أ- h متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ، فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$ $h([1,+\infty[)=[0,+\infty[$.

ب- - لدينا : $y=h^{-1}(x)\Leftrightarrow x=h(y)$ $\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[$

إذن :

$$e^x=y-2\sqrt{y}+2 \Leftrightarrow x=\ln\left(y-2\sqrt{y}+2\right)$$

$$e^x-1=\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{e^x-1}+1=\sqrt{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-1\geq 0\right) \text{ و } e^x-1\geq 0$$

$$\left(1+\sqrt{e^x-1}\right)^2=y \Leftrightarrow$$

و منه : $h^{-1}(x)=\left(1+\sqrt{e^x+1}\right)^2$ لكل x من $[0,+\infty[$