ثانوية محمد السادس **ورزازات**	**تصحيح الإمتحان الوطني الموحد** **الدورة العادية 10 / 06 / 2005**	**الأستاذ : الحيان** **الثانية بكالوريا علوم تجريبية**

أسئلة :

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة : $(E):\quad z^2-2(1+2i)z+1+4i=0$.

المميز المختصر للمعادلة (E) هو : $\Delta'=b'^2-ac=(1+2i)^2-1.(1+4i)=1+4i-4-1-4i=-4=(2i)^2$

إذن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما : $z_1=\dfrac{-b'+\alpha}{a}=\dfrac{1+2i+2i}{1}=\boxed{1+4i}$ و $z_2=\dfrac{-b'-\alpha}{a}=\dfrac{1+2i-2i}{1}=\boxed{1}$

حيث $\boxed{\alpha=2i}$ هو أحد الجذرين المربعين للعدد العقدي Δ' . وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{1,1+4i\}$.

2) لدينا : $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left[1,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

حسب علاقة **موافر** , لدينا : $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=\left[1,\dfrac{\pi}{6}\right]^{12}=\left[1^{12},12\times\dfrac{\pi}{6}\right]=[1,2\pi]=[1,0]=\boxed{1}$

3) نضع : $\begin{cases}u'(x)=x^2\\ v(x)=\ln x\end{cases}$ و إذن : $\begin{cases}u(x)=\dfrac{1}{3}x^3\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$ و .

u و v دالتين متصلتين وقابلتين للإشتقاق على المجال $[1,e]$ و u' و v' دالتين متصلتين على المجال $[1,e]$. حسب المكاملة بالأجزاء , لدينا :

$$\int_1^e x^2\ln(x)dx=\int_1^e u'(x)v(x)dx=[u(x).v(x)]_1^e-\int_1^e u(x)v'(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx=\frac{2e^3+1}{9}}$

4) نضع : $t=\sqrt{x-1}$, إذن : $dt=\left(\sqrt{x-1}\right)'dx=\dfrac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$ إذن $2dt=\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$. ولدينا : $x=1+t^2$ و

$x=2\Leftrightarrow t=1$ و $x=4\Leftrightarrow t=\sqrt{3}$. ($x\mapsto\sqrt{x-1}$ معرفة من $[2,4]$ نحو $\left[1,\sqrt{3}\right]$ وقابلة للإشتقاق على $[2,4]$) .

حسب المكاملة بتغيير المتغير , نحصل على :

$$\int_2^4\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=2[Arc\tan(t)]_1^{\sqrt{3}}=2\left(Arc\tan\left(\sqrt{3}\right)-Arc\tan(1)\right)=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

التمرين 1 :

1) لدينا: $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$ ؛ إذن (S) فلكة مركزها $\boxed{\Omega(1,0,1)}$ وشعاعها $\boxed{R=\sqrt{2}}$, ولدينا $(P):x+y-3=0$

وبما أن المسافة بين النقطة Ω و المستوى (P) تحقق ما يلي : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$,

فإن المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

2) لدينا $\overrightarrow{n_P}(1,1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (P) , إذن $\overrightarrow{n_P}$ موجهة للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوى (P) .

ومنه تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\quad/\alpha\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$. نعتبر $H(x,y,z)$ نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (P) .

لدينا : $H\in(\Delta)\cap(P)$ ؛ إذن $1+\alpha+\alpha-3=0\Rightarrow\alpha=1$ ومنه فإن : $\begin{cases}x=1+1=2\\ y=1\\ z=1\end{cases}$ ؛ وبالتالي فإن : $\boxed{H(2,1,1)}$.

التمرين الثاني : الصندوق : $\boxed{\underbrace{B\ B\ B}_{3}\quad \underbrace{N\ N\ N\ N\ N\ N\ N}_{7}}$

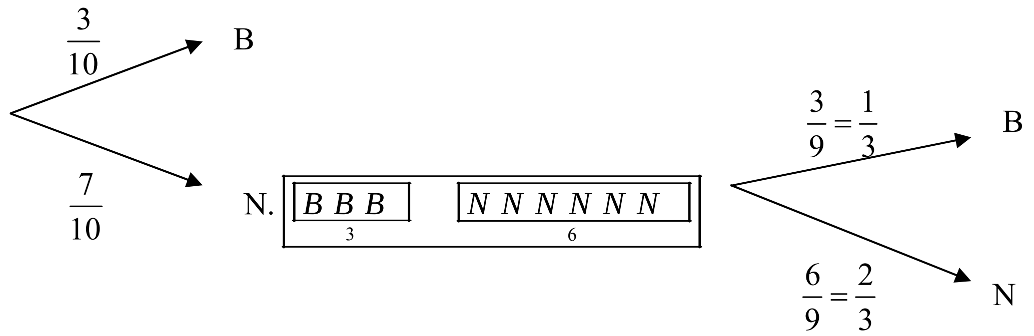
1) نسحب عشوائيا وتآنيا كرتين من الصندوق ؛ إذن الأمر يتعلق بالتأليفات لكرتين والرمز المستعمل C_n^p .

A : " الكرتان المسحوبتان لونهما أسود "؛ (NN). B :" من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أبيض "؛ (BN أو BB)

إحتمال الحدث A هو: $p(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}$ ولدينا : $C_7^2=\frac{A_7^2}{2!}=\frac{7\times 6}{1\times 2}=21$ و $C_{10}^2=\frac{A_{10}^2}{2!}=\frac{10\times 9}{1\times 2}=45$. ومنه : $p(A)=\frac{21}{45}=\boxed{\frac{7}{15}}$

إحتمال الحدثB هو: $p(B)=\frac{C_3^1\times C_7^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3\times 7+3}{45}=\frac{3\times 8}{45}=\boxed{\frac{8}{15}}$ (سحب كرة بيضاء وكرة سوداء أو سحب كرتين بيضاوين)

2) **شجرة الإمكانيات :**



C :" الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى " . إحتمال الحدث C هو : $p(C)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\boxed{\frac{3}{10}}$.

D :" الحصول على كرة بيضاء " . إحتمال الحدث D :

لدينا C و $\overline{C}$ حدثان غير منسجمان واتحادهما Ω ؛ إذن C و $\overline{C}$ يكونان تجزيئا للفضاء Ω ؛ ومنه فإن احتمال الحدث D هو :

$$p(D)=p(C)\times p_C(D)+p(\overline{C})\times p_{\overline{C}}(D)=p(D\cap C)+p(\overline{C})\times p_{\overline{C}}(D)=p(C)+p(\overline{C})\times p_{\overline{C}}(D)$$

وبما أن : $p(C)=\frac{3}{10}$ و $p(\overline{C})=1-p(C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ و $p_{\overline{C}}(D)=\frac{C_3^1}{C_9^1}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ فإن :

$$p(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{9+7}{30}=\frac{16}{30}=\boxed{\frac{8}{15}}$$

المسألة : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad g(x)=x-1-\ln(x);\quad h(x)=x+(x-2)\ln(x)$

الجزء الأول :

1) أ) ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$, لدينا : $g'(x)=\left(x-1-\ln(x)\right)'=1-\frac{1}{x}=\boxed{\frac{x-1}{x}}$.

ولدينا : $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$. جدول تغيرات الدالة g على المجال $\left]0,+\infty\right[$:

x	0		1		$+\infty$
g`(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	

ب) – لدينا g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]0,1]$ ؛ إذن $g\left(]0,1]\right) = \left[g(1), \lim_{x\to0^+} g(x)\right[= [0,+\infty[$ و $\forall x\in]0,1]: g(x)\ge 0$.

- ولدينا g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ؛ إذن $g\left([1,+\infty[\right) = \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [0,+\infty[$ ومنه فإن :

$\forall x\in[1,+\infty[: g(x)\ge 0$. وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[: g(x)\ge 0}$

(باستعمال المجالين المفتوحين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ؛ يمكن أن نبين أن : $\boxed{\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[: g(x)>0}$)

2) أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا : $h(x) = x+(x-2)\ln(x) = 1+x-1-\ln(x)+(x-1)\ln(x) = 1+g(x)+(x-1)\ln(x)$

ب) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا:

$$x\in[1,+\infty[\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ \ln(x)\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0\\ \ln(x)\ge 0\end{cases} \Rightarrow (x-1)\ln(x)\ge 0$$

$$x\in]0,1] \Rightarrow \begin{cases} 0<x\le 1\\ \ln(x)\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1\le 0\\ \ln(x)\le 0\end{cases} \Rightarrow (x-1)\ln(x)\ge 0$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[: (x-1)\ln(x)\ge 0}$

3) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا : $(x-1)\ln(x)\ge 0$, حسب 2 – ب ؛ و $g(x)\ge 0$, حسب 1 – ب . إذن :

$h(x) = 1+g(x)+(x-1)\ln(x)\ge 1>0$. خلاصة : $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[: h(x)>0}$

<u>الجزء الثاني :</u> $\forall x\in]0,+\infty[: f(x) = 1+x\ln(x)-(\ln(x))^2$

1) أ) لدينا : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1+x\ln(x)-(\ln x)^2 = \boxed{-\infty}$ ؛ لأن $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ و $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

<u>تأويل هندسي</u> : (C) يقبل <u>مقاربا عموديا</u> معادلته $\boxed{x=0}$.

ب) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+x\ln(x)-(\ln x)^2 = \lim_{x\to+\infty} 1+x\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \boxed{+\infty}$ ؛لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

و $\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$. ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln(x)-(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \boxed{+\infty}$.

<u>تأويل هندسي</u> : (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$, إتجاهه محور الأراتيب .

2) أ) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا :

$$f'(x) = \left(1+x\ln x-(\ln x)^2\right)' = \ln x + x\times\frac{1}{x} - 2\times\frac{1}{x}\times\ln x$$

$$= \ln x + 1 - 2\frac{\ln x}{x} = \frac{x\ln x + x - 2\ln x}{x} = \frac{x+(x-2)\ln x}{x} = \frac{h(x)}{x}$$

<u>خلاصة :</u> $\boxed{\forall x\in]0,+\infty[: f'(x) = \frac{h(x)}{x}}$

ب) حسب السؤال (3) من الجزء الأول ؛ لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x) = \frac{h(x)}{x} > 0$. إذن f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

3) أ) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) في النقطة $A(1,1)$ هي : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y = (x-1)+1$ يعني $\boxed{y=x}$.

ب) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا :

$$f(x)-x = 1+x\ln x-(\ln x)^2 - x = 1-(\ln x)^2 + x(\ln x - 1)$$

$$= (1-\ln x)(1+\ln x) + x(\ln x-1) = (\ln x-1)(x-1-\ln x) = (\ln x-1)g(x)$$

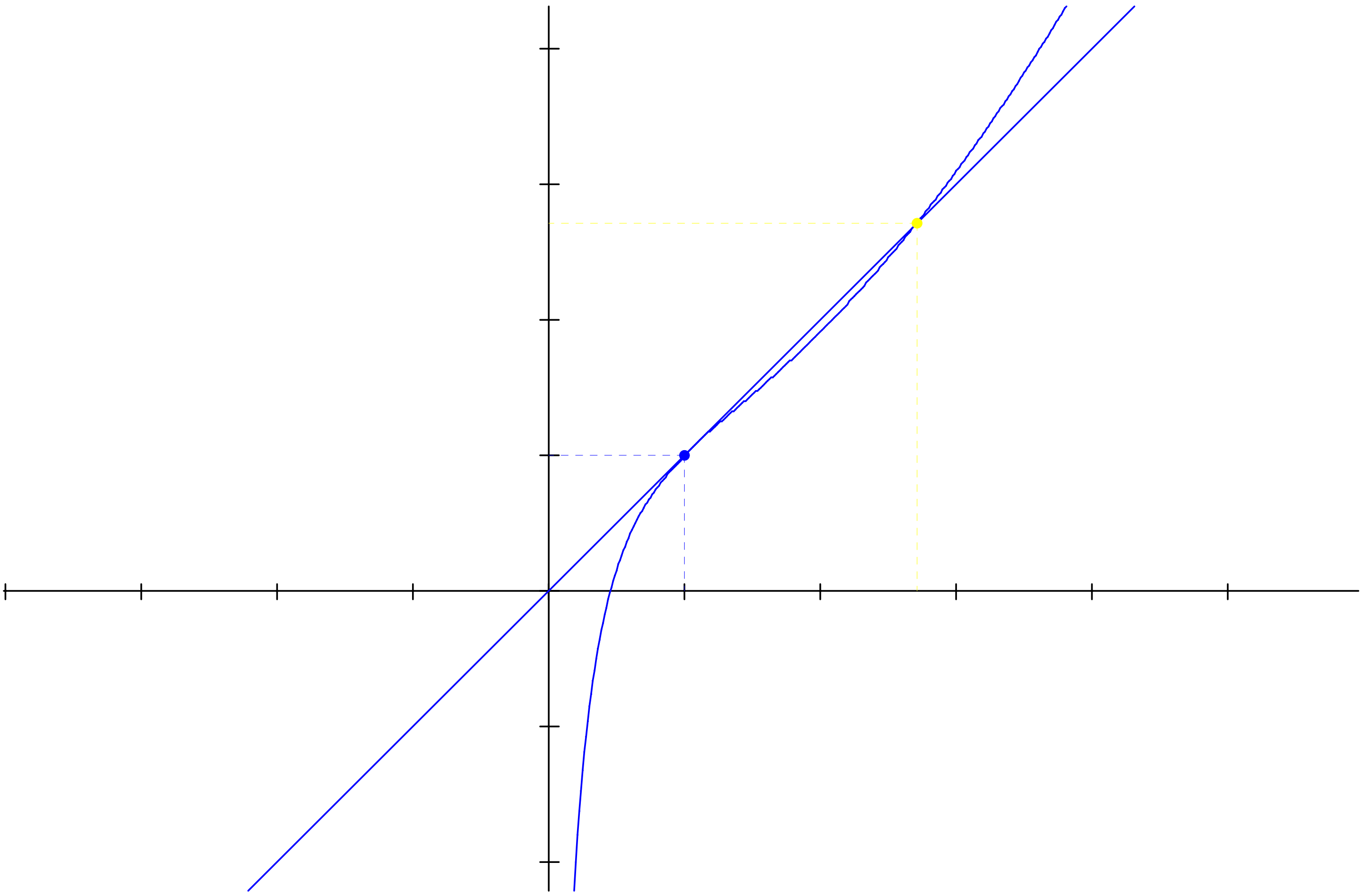
لدينا : $\begin{cases} x = e \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) - x = 0$. إذن : (C) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين A و $B(e,e)$.

حسب 3 ب , إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $\ln x - 1$. وبما أن : $\forall x \in]0,+\infty[: \begin{cases} x \geq e \Rightarrow \ln x \geq 1 \Rightarrow \ln x - 1 \geq 0 \\ 0 < x \leq e \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow \ln x - 1 \leq 0 \end{cases}$

فإن : $\forall x \in [e,+\infty[: f(x) - x \geq 0 \Leftarrow$ (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $[e,+\infty[$.

و : $\forall x \in]0,e], f(x) - x \leq 0 \Leftarrow$ (C) يوجد تحت (Δ) على المجال $]0,e]$.

4) إنشاء المنحنى (C) :



الجزء الثالث :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) من أجل $n = 0$, لدينا $u_0 = \sqrt{e}$, إذن : $1 < u_0 < e$. ليكن $n \in \mathbb{N}$, نفترض أن $1 < u_n < e$ ونبين أن $1 < u_{n+1} < e$ ؟

بما أن $1 < u_n < e$ و أن f تزايدية قطعا على المجال $[1,e]$ ؛ فإن : $f(1) < f(u_n) < f(e)$ أي : $1 < u_{n+1} < e$.

حسب مبدأ الترجع , لدينا : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \ 1 < u_n < e}$.

2) نعلم أن : $\forall x \in]1,e[: \ f(x) - x < 0$ (II – 3 ج) وأن $\forall n \in \mathbb{N} : \ 1 < u_n < e$ ؛ إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(u_n) - u_n < 0$

أي: $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} - u_n < 0$. وهذا يعني أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3) لدينا (i) $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \in]1,e[$ و (ii) f متصلة على المجال $[1,e]$ و (iii) $f([1,e]) = [1,e]$ و (iv) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 1 ؛ إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة نهايتها l بحيث : $f(l) = l$. ولدينا:

$f(l) = l \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow (\ln l - 1) g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 1$ أو $l = e$ (أنظر II 3 - ب و 3 – ج)

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq 0 \Rightarrow u_n \leq u_0 = \sqrt{e}$ ؛ فإن $l \leq u_0 = \sqrt{e}$. وبالتالي فإن : $l = 1$. $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$