SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

# الدورة العادية 2004

## التمرين الأول :

1) لدينا $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=x^2+(y-2)^2+(z+1)^2-3$

إذن $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ معادلة ديكارتية ل $(S)$ فلكة مركزها $\Omega\ (0,2,-1)$

و شعاعها $r=\sqrt{3}$ .

2) أ- $\Omega A=\sqrt{3}\Rightarrow A\in(S)$ .

ب- $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow x+y-z=0$ .

3) أ- $\vec{n}(1,1,1)$ منظمية على $(Q)$ $\Leftarrow (Q):x+y+z+d=0$ و $B\in(Q)\Leftarrow d=-2$ .

ب- $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}}=d(\Omega,(Q))\Rightarrow d\prec r\Rightarrow (Q)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة شعاعها

$R=\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ و مركزها $H(a,b,c)$ المسقط العمودي ل $\Omega$ على $(Q)$ .

إذن : $\exists t\in IR/\begin{cases}a=t\\b=2+t\\c=-1+t\\a+b+c-2=0\end{cases}\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow H\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$ .

## التمرين الثاني :

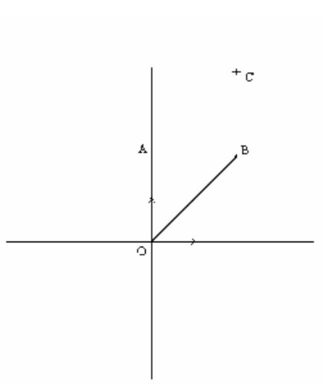
1) $\Delta=-16+16(1+i)=16i$ و $2i=(1+i)^2\Rightarrow \Delta=\left(2\sqrt{2}(1+i)\right)^2$ .

$z'=2i-2\sqrt{2}(1+i)=-2\sqrt{2}+\left(2-2\sqrt{2}\right)$ و $z''=2i+2\sqrt{2}(1+i)=2\sqrt{2}+\left(2+2\sqrt{2}\right)$

$\mathrm{Re}(z'')\succ 0\Rightarrow z''=z_1$ و $z'=z_2$ .

2) $a=\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $b=\left[2,\dfrac{\pi}{4}\right]$ .

3) أ-




$aff(C)=aff(A)+aff(B)\Rightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{|a|}{|b|}=1\Rightarrow OA=OB$ .

ب- $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Rightarrow OBCA$ متوازي الأضلاع

$OA=OB\Rightarrow OBCA$ معين . $\arg(z_1)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$ .

$.\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right) \equiv \arg(b) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi] \Leftarrow \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right) \equiv \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

## التمرين الثالث :

1) $p(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{6}$ ، $p(A) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}$

$p(C) = 1 - p(\overline{C})$ ( $\overline{C}$ : "لا توجد أي بيدقة حمراء من بين البيدقات المسحوبة")

$p(C) = \frac{16}{21} \Leftarrow p(\overline{C}) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}$

2) $A \cap B$ : "$B_1R_1N_1$" $\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_1^1 C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{21}$ .

## التمرين الرابع :

1) أ- $\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x+1-1}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$ $\quad \forall x \in IR,$ .

ب- $IR$ متماثل بالنسبة للصفر

و $\forall x \in IR, \quad f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right) = -f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .

3) أ- $\forall x \in IR, \quad f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\left(e^x+1\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ .

ب- لكل $x$ من $IR^+$ لدينا $f'(x) \prec 0 \Rightarrow$ $f$ تناقصية قطعا على $IR^+$ ، إذن :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | -- |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $-\infty$ |

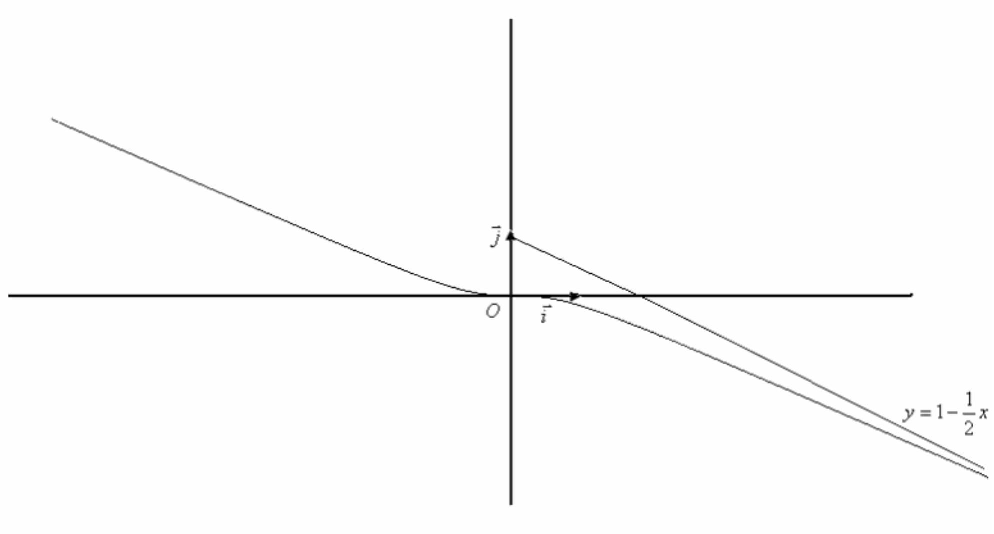
ج- $f$ تناقصية قطعا على $IR^+$ ، إذن : $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ يعني $1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} \leq 0$

و منه $\forall x \in IR^+ \quad : 1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ .

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] = 0$ .

$(C)$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1 - \frac{1}{2}x$

5) المنحنى




6) أ- $t=e^{-x} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t}$ إذن $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{x}}\,dx=\int_{e}^{1}\frac{t}{1+t}\left(-\frac{dt}{t}\right)=-\int_{e}^{1}\frac{1}{1+t}dt=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ .

ب- $A=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\left[x-\frac{1}{4}x^{2}\right]_{-1}^{0}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=\frac{5}{4}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)(um)$ .

II-

1) من أجل $n=0$ : $U_0=1\succ 0$ .

نفترض أن $U_n\succ 0$ إذن $e^{U_n}+1\succ 2$ ومنه $\frac{2}{e^{U_n}+1}\prec 1$ أي $U_{n+1}=1-\frac{2}{e^{U_n}+1}\succ 0$.

إذن : $U_n\succ 0 \quad \forall n\in IN$.

2) أ- لدينا $\forall x\in IR^{+} : 1-\frac{2}{e^{x}+1}\le\frac{1}{2}x$ . نضع $x=U_n$ ( $U_n\succ 0$ ) فنجد $1-\frac{2}{e^{U_n}+1}\le\frac{1}{2}U_n$

أي $U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$ لكل $n$ من $IN$ .

ب- لدينا $U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n \Rightarrow U_{n+1}-U_n\le-\frac{1}{2}U_n\prec 0 \Rightarrow (U_n)$ متتالية تناقصية.

3) من أجل $n=0$ : $U_0=1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$

نفترض أن $U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ إذن $\frac{1}{2}U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ومنه $U_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (لأن $U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$ ).

إذن $U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل $n$ من $IN$ .

لدينا $0 \prec U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\Leftarrow$ $\lim U_n = 0$ .