الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول :

1) $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - 1 = 0 \Leftarrow \Omega(1,0,-1)$ مركز الفلكة و $r = 1$ شعاعها.

2) $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 = r \Leftarrow (P)$ مماس للفلكة (S).

3) $H(a,b,c)$ نقطة تماس (P) و (S) $\Leftarrow H$ هي تقاطع (Δ) العمودي على (P) المار من Ω مع المستوى (P)

إذن $\vec{n}(1,-2,2)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ) ، ومنه : $\exists t \in IR / \begin{cases} a = 1+t \\ b = -2t \\ c = -1+2t \\ a-2b+2c-2 = 0 \end{cases}$.

إذن $1+t-2(-2t)+2(-1+2t)-2 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{H\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)}$

التمرين الثاني :

1)

x	$\frac{1}{e}$		1		e
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	

$I = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \dfrac{1}{x}\ln(x)dx + \int_{1}^{e} \dfrac{1}{x}\ln(x)dx \Leftarrow$

و $\dfrac{1}{x}\ln(x) = \ln'(x)\ln(x) \Rightarrow I = \left[-\dfrac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\dfrac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{1}^{e}$ إذن $\boxed{I = 1}$.

2) أ- $\dfrac{at+a+b}{1+t} = a + \dfrac{b}{1+t} = \dfrac{2t}{1+t} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ و $b = -2$.

ب- $t = \sqrt{2+x} \Rightarrow x = t^2 - 2$ و $dx = 2t\ dt \Rightarrow J = \int_2^3 \dfrac{2t}{1+t}\ dt$.

باستعمال أ- : $J = \int_2^3 2 - \dfrac{2}{1+t}\ dt = 2[t - \ln|1+t|]_2^3 = 2 + 2\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

التمرين الثالث :

1) أ- الحدث $\overline{A}$ هو :"سحب 3كرات لا تحمل الرقم1" $\Rightarrow p(\overline{A}) = \dfrac{C_4^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow p(A) = \dfrac{4}{5}$

ب- الحدث S هو :"كرتان تحملان الرقم1وكرة تحمل الرقم2- **أو** كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم-1 و كرة تحمل الرقم 0 **أو** كرة تحمل الرقم2 و كرة تحمل الرقم 2- و كرة تحمل الرقم 0 " إذن :

$$\boxed{p(S) = \dfrac{C_2^2C_1^1 + C_1^1C_1^1C_1^1 + C_2^1C_1^1C_1^1}{C_6^3} = \dfrac{1}{5}}$$

2) نسمي p احتمال تحقق S ثلاث مرات بالضبط ، إذن $p = C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{625}$.

التمرين الرابع :

1) أ- لدينا $(4+i)^2=15+8i$.

ب- $\Delta=(2-3i)^2+20(1+i)=15+8i \Rightarrow d=\pm(4+i)$ (الجذرين المربعين ل Δ)

إذن $z'=\frac{-2+3i-4-i}{2}=-3+i$ و $z''=\frac{-2+3i+4+i}{2}=1+2i$.

2) أ- لدينا $\frac{c-a}{b-a}=\frac{-1+4i}{-4-i}=\frac{(-1+4i)(-4+i)}{17}=-i \Rightarrow \frac{c-a}{b-a}=\left[1,-\frac{\pi}{2}\right]$.

ب- $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1 \Rightarrow ABC$ متساوي الساقين رأسه A .

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow ABC$ قائم الزاوية في A .

مسألة :

الجزء الأول :

1) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $f(x)=x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x-2\sqrt{x}}{x}=1-\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$

إذن ، f غير قابلة للاشتقاق في 0^+ .

3) لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	1	↗	$+\infty$

الجزء الثاني:

1) من أجل $n=0$: $1\le U_0=2\le 2$. العلاقة محققة.

نفترض أن $1\le U_n\le 2$. بما أن f تزايدية على المجال $[1,2]$ فإن $f(1)\le f(U_n)\le f(2)$

إذن $1\le U_{n+1}\le 4-2\sqrt{2}$ و منه $1\le U_{n+1}\le 2$ ($4-2\sqrt{2}\le 2$)

و بالتالي : $1\le U_n\le 2$ لكل n من IN .

2) نبين بالترجع أن : $U_{n+1} \leq U_n$ لكل n من IN .

من أجل $n = 0$: $U_0 = 2$ و $U_1 = 4 - 2\sqrt{2}$ إذن $U_1 \leq U_0$

نفترض أن $U_{n+1} \leq U_n$ بما أن f تزايدية على المجال$[1,2]$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \Leftarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

و بالتالي : $U_{n+1} \leq U_n$ لكل n من IN ، أي أن المتتالية(U_n) تناقصية .

3) المتتالية(U_n) تناقصية و مصغورة بالعدد1 فهي إذن متقاربة .

- نضع $I = [1,2]$. لدينا f متصلة على I و $f(I) = [1, 4 - 2\sqrt{2}] \subset I$ و (U_n) متقاربة ،

إذن نهايتها l تحقق $f(l) = l$ وهذا يعني أن $l - 2\sqrt{l} + 2 = l$ أي $\boxed{l = 1}$.

الجزء الثالث :

1) أ- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

ب- $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{x - 2\sqrt{x} + 2} . \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{x} = 0$

لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{x} = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{x - 2\sqrt{x} + 2} = 0$.

(C)يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

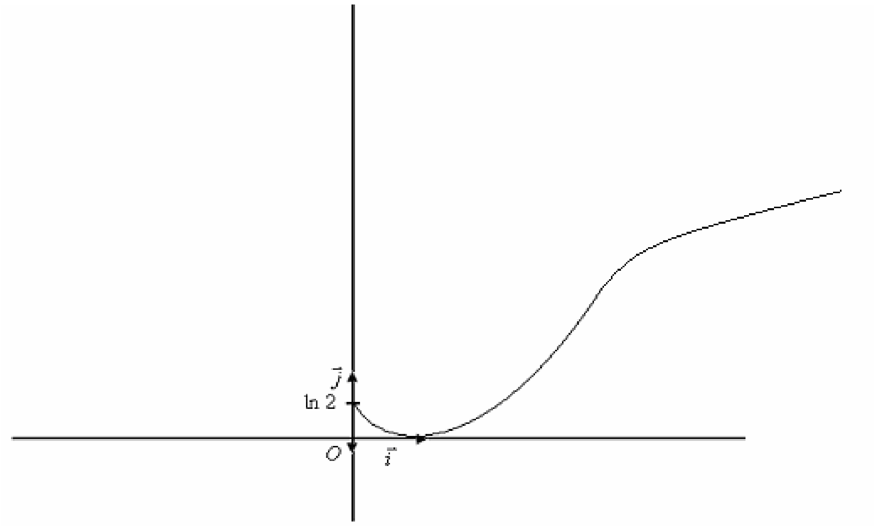
2) لدينا $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad , \forall x \in [0, +\infty[$.

إذن إشارة$g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ ($f(x) > 0$ لكل x من IR^+).

و منه جدول إشارة$g'(x)$ هو :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) المنحنى:



4) أ- h متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ ، فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$. $h([1,+\infty[)=[0,+\infty[$

ب- - لدينا : $y=h^{-1}(x) \Leftrightarrow x=h(y)$ $\forall x \in [0,+\infty[, \forall y \in [1,+\infty[$

إذن :

$$e^x = y-2\sqrt{y}+2 \Leftrightarrow x=\ln\left(y-2\sqrt{y}+2\right)$$

$$e^x-1=\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{e^x-1}+1=\sqrt{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-1\geq 0\right) \text{ و } e^x-1\geq 0$$

$$\left(1+\sqrt{e^x-1}\right)^2=y \Leftrightarrow$$

و منه : $\boxed{h^{-1}(x)=\left(1+\sqrt{e^x+1}\right)^2 \text{ لكل } x \text{ من } [0,+\infty[}$