امتحان يونيو 2003	الحـــل

التمرين 1

-1 نحسب باستعمال المكاملة بالأجزاء $I=\int_1^2 \ln(x)dx$

$$I=\int_1^2 \ln(x)dx=[x\ln x]_1^2-\int_1^2 x\times\frac{1}{x}dx=[x\ln x]_1^2-\int_1^2 dx=[x\ln x]_1^2-[x]_1^2=2\ln 2-1$$

-2 أحسب التكامل $\int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\,dx$ **(يمكن وضع** $t=\sqrt{e^x}$ **)**

ليكن $x\in[0;\ln 4]$

نضع $t=\sqrt{e^x}$ **ومنه** $x=2\ln t$ **و بالتالي** $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$ **أي** $dx=\frac{2}{t}dt$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\ln 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ t=2\end{cases}$$

إذن $\int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\,dx=\int_1^2(2\ln t)\times t\times\frac{2}{t}dt=4\int_1^2\ln(t)dt=4I=8\ln 2-4$

التمرين 2

ليكن Ω **كون الإمكانيات**

-1 نحسب $p(A)$ **و** $p(B)$

لدينا A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون"

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^2+C_2^2}{C_8^2}=\frac{15+1}{28}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$$

لدينا B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم "

$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_4^2+C_4^1\times C_4^1}{C_8^2}=\frac{6+16}{28}=\frac{22}{28}=\frac{11}{14}$$

-2 نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

$$p(X=0)=\frac{card(X=0)}{card\Omega}=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

$$p(X=1)=\frac{card(X=1)}{card\Omega}=\frac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

$$p(X=2)=\frac{card(X=2)}{card\Omega}=\frac{C_4^1\times C_1^1+C_3^2}{C_8^2}=\frac{4+3}{28}=\frac{1}{4}$$

$$p(X=3)=\frac{card(X=3)}{card\Omega}=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

قانون احتمال **X**

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
$p\left(X=x_i\right)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$

التمرين3

نعتبر المعادلة $(E):\quad z\in\mathbb{C}\quad mz^2-2z+\overline{m}=0$

1- **نبين أن حلي المعادلة** (E) **هما** $z'=\frac{1+i}{m}$ و $z''=\frac{1-i}{m}$

المميز المختصر للمعادلة (E) هو $d=1-m\cdot\overline{m}=1-|m|^2=1-2=-1=i^2$ لأن $|m|=\sqrt{2}$

ومنه $z'=\frac{1+i}{m}$ و $z''=\frac{1-i}{m}$

2- **نكتب كل من** z' و z'' و $\frac{z'}{z''}$ **عل الشكل المثلثي.**

$$z'=\frac{1+i}{m}=\frac{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\alpha\right]}=\left[1;\frac{\pi}{4}-\alpha\right]\quad \text{و}\quad z''=\frac{1-i}{m}=\frac{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\alpha\right]}=\left[1;-\frac{\pi}{4}-\alpha\right]$$

$$\frac{z'}{z''}=\frac{\left[1;\frac{\pi}{4}-\alpha\right]}{\left[1;-\frac{\pi}{4}-\alpha\right]}=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$$

3- **نبين أن الرباعي OABC مربع .**

z' و z'' و $z'+z''$ ألحاق النقط **A** و **B** و **C** على التوالي

$$\arg\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg\frac{z''-z'}{z''+z'}\equiv\arg\frac{\frac{-2i}{m}}{\frac{2}{m}}\equiv\arg(-i)\equiv\frac{-\pi}{2}\qquad[2\pi]$$

إذن $(OC)\perp(AB)$

لدينا $OC=|z'+z''|=\left|\frac{2}{m}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و $AB=|z''-z'|=\left|\frac{-2i}{m}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ومنه $AB=OC$

إذن الرباعي OABC مربع .

التمرين4

1- **حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم** (D).

المستقيم (D) مار من $A(2;0;2)$ و عمودي على المستوى (P) ذا المعادلة $x+y-z+3=0$.

ومنه المتجهة $\vec{u}(1;1;-1)$ المنظمية على (P) موجهة لـ (D)

إذن $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases}$ تمثيل بارامتريا للمستقيم (D)

2- نحدد إحداثيات B .

$$B(x;y;z) \in (D) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \\ x+y-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \\ 3t-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

إذن $B(3;1;1)$

3- أ- نحدد شعاع الفلكة (S)

لدينا $AB = d(A;(P)) = \dfrac{|2+0-2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \sqrt{3}$

ليكن r **شعاع الفلكة** $\qquad r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{7}$

ب- نحدد معادلة ديكارتية للفلكة (S)

$$(S):(x-2)^2 + y^2 + (z-2) = 7$$
$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0$$

المسألة

$$\begin{cases} f(x) = \ln(1-x^3) \quad ; \quad x \prec 0 \\ f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2 \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1 - أ- نبين أن الدالة f **متصلة في 0.**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(1-x^3) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 4x\sqrt{x} - 3x^2 = 0 \quad ; \quad f(0) = 0$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ اذن f **متصلة في 0.**

ب- نبين أن الدالة f **قابلة للاشتقاق في 0**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x} - 3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} - 3x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x^3)}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \sqrt[3]{t^2} = 0 \qquad (t = -x^3)$$

إذن f **قابلة للاشتقاق في 0 و** $f'(0) = 0$

2- نبين أن f **تناقصية على المجالين** $]-\infty;0[$ **و** $[1;+\infty[$ **و تزايدية على المجال** $[0;1]$.

$$* \quad \forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = 4\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt{x}} - 6x = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6x = 6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$$

إشارة $f'(x)$ على $[0;+\infty[$ هي إشارة $(1-\sqrt{x})$.

لدينا $1-\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in [0;1]$ ومنه f تزايدية على المجال $[0;1]$.

$1-\sqrt{x} \leq 0 \quad \forall x \in [1;+\infty[$ و منه f تناقصية على $[1;+\infty[$

* $\quad \forall x \in]-\infty;0[\quad f'(x) = \dfrac{-3x^2}{1-x^3}$

لدينا $1-x^3 \succ 0 \quad ; \quad -3x^2 \prec 0 \quad \forall x \in]-\infty;0[$ ومنه $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in]-\infty;0[$

إذن f تناقصية على $]-\infty;0[$

3- أ- نحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-3\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(1-x^3\right) = +\infty$$

ب- نتحقق من أنه لكل $x \prec 0 \quad ; \quad \dfrac{f(x)}{x} = 3\dfrac{\ln(-x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x}$

ليكن $x \in]-\infty;0[$

$$3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} = \frac{\ln\left(-x^3\right)+\ln\left(1-x^{-3}\right)}{x} = \frac{\ln\left(-x^3(1-x^{-3})\right)}{x} = \frac{\ln\left(1-x^3\right)}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

ج- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-3\right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(1-x^{-3}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

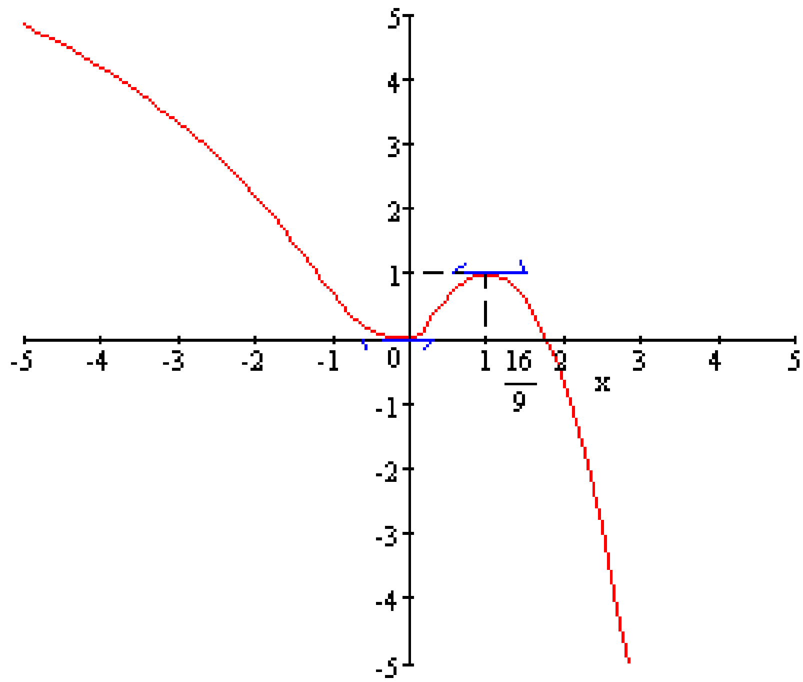
إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

4- ننشئ المنحنى (C).

$$4x\sqrt{x} - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}\left(4-3\sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \frac{16}{9}$$

$$\forall x \in]-\infty;0[\quad f''(x) = \frac{-3x\left(2+x^3\right)}{\left(1-x^3\right)^2}$$

على $]-\infty;0[$ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف في النقطة ذات الأفصول $-\sqrt[3]{2}$



5- أ- نبين أن h تقابل من $]-\infty;0[$ نحو مجال J يجيب تحديده .

لدينا h قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0[$ و منه h متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$

و $h(]-\infty;0[)=]0;+\infty[$ ومنه h تقابل من $]-\infty;0[$ نحو المجال $J=]0;+\infty[$

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J.

ليكن $x\in]0;+\infty[$ و $y\in]-\infty;0[$

$$\begin{aligned} h^{-1}(x)=y &\Leftrightarrow h(y)=x \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1-y^3\right)=x \\ &\Leftrightarrow y^3=1-e^x \end{aligned}$$

$$\left(y\in]-\infty;0[\quad x\in]0;+\infty[\right) \qquad h^{-1}(x)=y \Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{e^x-1}$$

إذن $\qquad h^{-1}(x)=-\sqrt[3]{e^x-1} \qquad \forall x\in]0;+\infty[$

6- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$u_0=\frac{4}{9} \text{ و } u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

أ- نبين بالترجع أن $\frac{4}{9}\le u_n\le 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{4}{9}$ إذن $\frac{4}{9}\le u_0\le 1$

لنفترض أن $\frac{4}{9}\le u_n \le 1$ لنبين أن $\frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$

لدينا f تزايدية على $[0;1]$ ومنه $f(\frac{4}{9})\le f(u_n)\le f(1)$

و بالتالي $\frac{4}{9}\le u_{n+1}\le 1$ لأن $f(1)=1$ و $f(\frac{4}{9})=\frac{16}{27}$; $\frac{4}{9}\prec\frac{16}{27}$

إذن $\frac{4}{9}\le u_n \le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- نبين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_{n+1}-u_n=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2-u_n=u_n\left(-3u_n+4\sqrt{u_n}-1\right)$$
$$=u_n\left(-3\sqrt{u_n}+1\right)\left(\sqrt{u_n}-1\right)$$

لدينا $\frac{4}{9}\le u_n \le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ومنه $\frac{1}{3}\prec\frac{2}{3}\le\sqrt{u_n}\le 1$

وبالتالي $-3\sqrt{u_n}+1\prec 0$; $\sqrt{u_n}-1\le 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

إذن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ومنه (u_n) تزايدية.

ج- نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

بما أن (u_n) تزايدية و مكبورة فان (u_n) متقاربة.

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ و $f\left(\left[\frac{9}{4};1\right]\right)\subset\left[\frac{9}{4};1\right]$ و f متصلة على $\left[\frac{4}{9};1\right]$

$\lim u_n$ هو حل للمعادلة $f(l)=l$ في $\left[\frac{4}{9};1\right]$

$$f(l)=l \Leftrightarrow 4l\sqrt{l}-3l^2-l=0$$
$$\Leftrightarrow l\left(-3\sqrt{l}+1\right)\left(\sqrt{l}-l\right)=0$$
$$\Leftrightarrow l=0 \quad ou \quad l=1 \quad ou \quad l=\frac{1}{9}$$

وحيث $l\in\left[\frac{4}{9};1\right]$ فان $l=1$ ومنه $\lim u_n=1$