

التحضير

التمرين الأول

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط $B(0,1,-2)$ و $A(1,1,-1)$

و $C(3,2,1)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

(1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ وأن شعاعها هو $\sqrt{3}$

(2) أ- بين أن $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ وتحقق من أن $x - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب- تحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1

(3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC)

أ- بين أن $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

ب- بين أن مثلث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(2,0,0)$

ج- استنتج مركز الدائرة (Γ)

التمرين الثاني

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 12z + 61 = 0$

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C التي

أحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a = 6 - 5i$ و $b = 4 - 2i$ و $c = 2 + i$

أ- احسب $\frac{a-c}{b-c}$ واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمة .

ب- نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة \vec{u} حيث لحق \vec{u} هو $1 + 5i$

تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d = 3 + 6i$

ج- بين أن : $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ وأن عمدة للعدد العقدي $-1 + i$

د- استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{CB}, \overline{CD})$

التمرين الثالث

يحتوي كيس على ثماني بیدقات : بیدقة واحدة تحمل العدد 0 وخمس بیدقات تحمل العدد 1 وبیدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بين البیدقات باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بیدقات من الكيس .

(1) ليكن A الحدث : " الحصول على ثلاث بیدقات تحمل أعدادا مختلفة مثني مثني "

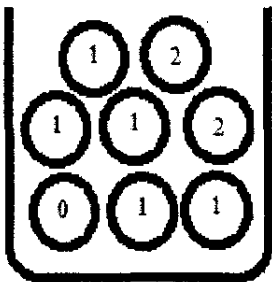
بين أن : $P(A) = \frac{5}{28}$

(2) ليكن B الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البیدقات المسحوبة يساوي 5 "

بين أن : $P(B) = \frac{5}{56}$

(3) ليكن C الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البیدقات المسحوبة يساوي 4 "

بين أن : $P(C) = \frac{3}{8}$



التمرين الثاني

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ لكل n من \mathbb{N}

(1) تحقق من أن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ لكل n من \mathbb{N} 0.25

(2) أ- بين بالترجع أن : $u_n < 12$ لكل n من \mathbb{N} 0.5

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا . 0.5

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . 0.25

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 12$ لكل n من \mathbb{N}

أ- باستعمال السؤال (1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم اكتب v_n بدلالة n 0.75

ب- بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ لكل n من \mathbb{N} ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) 0.75

التمرين الثالث

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

(1) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0, 1[$ 0.75

ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من المجال $]0, 1[$

(2) بين أن $x^2 - 1$ و $2x^2 \ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1, +\infty[$ 0.75

ثم استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]1, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$

ولیکن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 3 cm) .

(1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا . 0.5

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (يمكنك كتابة $\frac{f(x)}{x}$ على الشكل $\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \ln x$) 1

واستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

(2) أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$ 1.25

ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ 0.5

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ ثم بين أن $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ 0.5

(3) أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 1

(4) أ- بين أن $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 - 1$ على \mathbb{R} 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$ 1

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$ 0.25

التمرين 1 : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0; C(3, 2, 1); B(0, 1, -2); A(1, 1, -1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z = 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{3})^2$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1, 0, 1)$ وشعاعها $r = \sqrt{3}$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0} \quad (2)$$

$\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) إذن $(ABC): x + 0y - z + d = 0$

وبما أن $A \in (ABC)$ فإن $1 + 1 + d = 0$ أي $d = -2$ ومنه $(ABC): x - z - 2 = 0$

(ب) $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$ إذن (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $R = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{3-2} = 1$

(3) $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منظمية على (ABC) و $(\Delta) \perp (ABC)$ إذن $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ موجهة ل (Δ) و حيث أن (Δ) يمر من Ω

$$(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} / t \in \mathbb{R} \quad \text{أي } (\Delta) \begin{cases} x=1+t \\ y=0+0t / t \in \mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases} \quad \text{فإن}$$

(ب) تحديد $(\Delta) \cap (ABC)$: لنفرغ التمثيل البارامتري ل (Δ) في المعادلة الديكارتيّة ل (ABC)

$$(1+t) - (1-t) - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ج) مركز الدائرة (Γ) هو تقاطع (Δ) و (ABC) أي $H(2, 0, 0)$

التمرين 2 :

$$\Delta = 144 - 244 = -100 = (10i)^2 \quad z^2 - 12z + 61 = 0 \quad (1)$$

$$z_1 = \frac{12-10i}{2} = 6-5i \quad ; \quad z_2 = 6+5i$$

$$z_c = c = 2+i \quad z_B = b = 4-2i \quad ; \quad z_A = a = 6-5i \quad (2)$$

$$\text{إذن النقط } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة} \quad \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{a - c}{b - c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2 \in \mathbb{R} \quad (أ)$$

$$T: z' = z + z_u = z + 1 + 5i \quad (ب)$$

$$d = z_D = z_C + 1 + 5i = 2 + i + 1 + 5i = 3 + 6i$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i-15}{4+9} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i \quad (ج)$$

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \text{إذن} \quad |-1+i| = \sqrt{2}$$

وبالتالي $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$

$$\left(\overline{\overline{CB, CD}} \right) \equiv \text{Arg} \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \right) \equiv \text{Arg} \left(\frac{d-c}{b-c} \right) \equiv \text{Arg}(-1+i) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \quad (د)$$

التمرين 3 $card\Omega = C_8^3 = 56$

(1) $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{10}{56} \cdot \frac{5}{28}$ إذن $cardA = C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1 = 10$

(2) لدينا $2+2+1=5$ (حالة واحدة فقط) إذن $cardB = C_5^1 \times C_2^2 = 5$ وبالتالي $P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{5}{56}$

(3) لدينا $0+2+2=4$ و $1+1+2=4$ (حالتان فقط) إذن $cardC = C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1 = 21$ وبالتالي $P(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$

التمرين 4: $U_0 = 11$ $\forall n \in \mathbb{N} : u_{(n+1)} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$

(1) $u_{(n+1)} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}u_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

(2) * من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 11 < 12$

* نفترض أن $u_n - 12 < 0$ (معطى) ، لنبين أن $u_{(n+1)} - 12 < 0$ (هدف)

$u_{(n+1)} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$ (حسب السؤال الأول و الافتراض)

خلاصة : حسب مبدأ الاستدلال بالترجع لدينا $u_n < 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ب) * لدينا $u_0 = 11$ و $u_1 = \frac{10}{11}u_0 + \frac{12}{11} = \frac{122}{11} > u_0$

* نفترض أن $u_n > u_{(n+1)}$ (معطى) ، لنبين أن $u_{(n+2)} > u_{(n+1)}$ (هدف)

$u_{(n+2)} > u_{(n+1)} \Rightarrow \frac{10}{11}u_{(n+1)} + \frac{12}{11} > \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} \Rightarrow u_{(n+2)} > u_{(n+1)}$

خلاصة : حسب مبدأ الاستدلال بالترجع لدينا $u_n > u_{(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ أي أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة قطعاً

(ج) المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة و مكبورة (ب12) إذن فهي متقاربة

(3) $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 12$

(أ) $\forall n \in \mathbb{N} : v_{(n+1)} = u_{(n+1)} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) = \frac{10}{11}v_n$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{10}{11}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0(q)^n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$

(ب) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 12 + v_n$ إذن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ وحيث أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ (لأن $-\frac{10}{11} < 1$) فإن $\lim u_n = 12$

التمرين 5 :

(I) $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$; $x \in]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$2x^2$		+	+
$\ln(x)$		- 0	+
$2x^2 \ln(x)$		- 0	+

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0 -

(1) نلاحظ من خلال جدولتي الإشارة أعلاه أنه إذا كان $x \in]0, 1[$ فإن $x^2 - 1 < 0$ و $2x^2 \ln(x) < 0$ وبالتالي $g(x) < 0$ أي $2x^2 \ln(x) + x^2 - 1 < 0$

وبما أن $g(1) = 0$ فإن $g(x) \leq 0$ $\forall x \in]0, 1]$

(2) نلاحظ من خلال جدول الإشارة أعلاه أنه إذا كان $x \in]1, +\infty[$ فإن $x^2 - 1 > 0$ و $2x^2 \ln(x) > 0$ وبالتالي $g(x) > 0$ أي $2x^2 \ln(x) + x^2 - 1 > 0$

وحيث أن $g(1) = 0$ فإن $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$

$$\left(\|i\| = \|j\| = 3cm\right) \quad x \in]0, +\infty[\quad ; \quad f(x) = (x^2 - 1)\ln(x) \quad (\text{II})$$

$$(أ) \quad \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} (x^2 - 1)\ln(x) = (-1) \times (-\infty) = +\infty \quad \text{إذن } (C_f) \text{ يقبل المستقيم } x=0 \text{ كمقارب عمودي}$$

$$(ب) \quad \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x^2 - 1)\ln(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty \quad \text{إذن } (C_f) \text{ يقبل بجوار } +\infty \text{ فرعاً شلجيمياً إتجاهه محور الأرتايب}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = (x^2 - 1)' \ln(x) + (x^2 - 1)(\ln(x))' = 2x \ln(x) + \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{2x^2 \ln(x) + x^2 - 1}{x} = \frac{g(x)}{x} \quad (2)$$

$$\text{لدينا } f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0 \quad \text{إذن } (C_f) \text{ يقبل في النقطة } A(1,0) \text{ مماساً أفقياً}$$

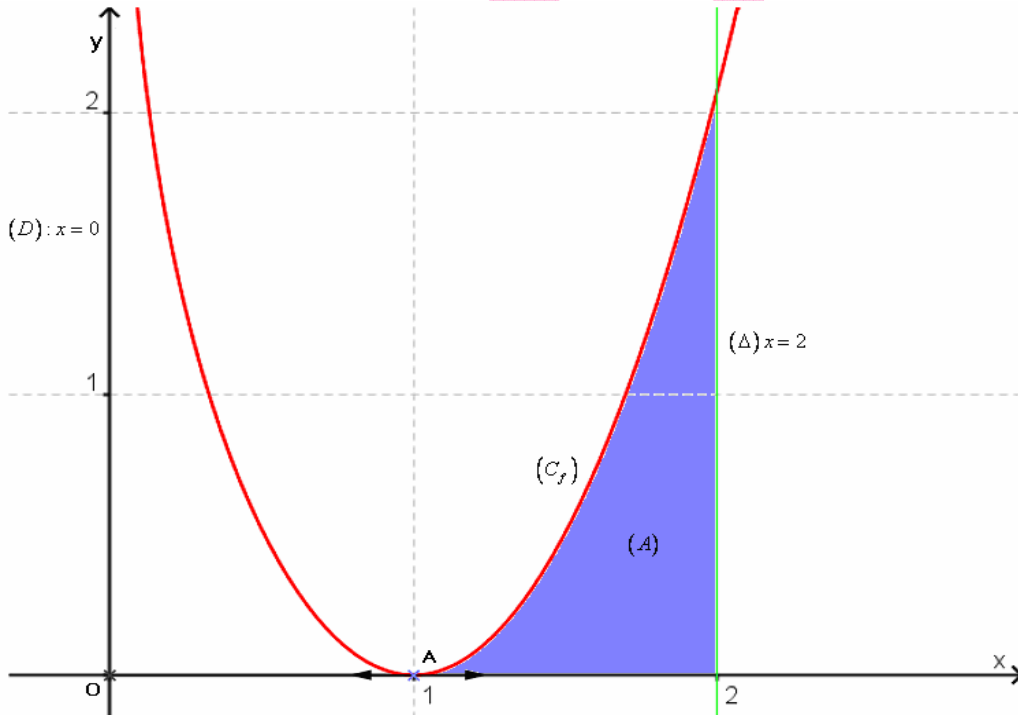
$$(ب) \text{ لدينا : } x > 0 \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \text{إذن إشارة } f'(x) \text{ على المجال }]0, +\infty[\text{ هي إشارة } g(x)$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

إذن f تناقصية على المجال $]0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty[$ (ج)

x	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة f أن $f(1) = 0$ هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة f على المجال $]0, +\infty[$ إذن $f(x) \geq 0$; $\forall x \in]0, +\infty[$ (3)



$$(أ) \quad \text{لدينا } \forall x \in \mathbb{R} : u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = x^2 - 1 \quad \text{إذن الدالة } u \text{ أصلية لـ } x \rightarrow x^2 - 1 \text{ على } \mathbb{R} \quad (4)$$

$$(ب) \quad \int_1^2 (x^2 - 1)\ln(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right)(\ln(x))' dx$$

$$= \frac{2}{3} \ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} - 1 dx$$

$$= \frac{2}{3} \ln(2) - \left[\frac{x^3}{9} - x \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \ln(2) - \left(-\frac{10}{9} + \frac{8}{9} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \ln(2) + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln(2))$$

$$"UA" = \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \| = 9 \text{ cm}^2$$

(ج) لنحدد وحدة قياس المساحة :

$$(A) = \int_1^2 f(x) dx \times "UA" = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx \times "UA" = \frac{9}{2} (1 + 3 \ln(2)) \times 9 \text{ cm}^2$$
$$= 2 (1 + 3 \ln(2)) \text{ cm}^2$$

