الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقط $A(-3,0,0)$ و $B(0,0,-3)$ و $C(0,2,-2)$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ وشعاعها هو 3

1.25 | 1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x-y+2z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

0.75 | ب- احسب المسافة $d(\Omega,(ABC))$ واستنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

2) ليكن (D) المستقيم المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC)

0.5 | أ - بين أن $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} \quad (t\in IR)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

0.5 | ب - بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S) هو $(-1,2,-1)$

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a=2-i$ و $b=6-7i$ و $c=8+3i$

0.75 | 1) أ- بين أن : $\frac{c-a}{b-a}=i$

0.75 | ب- استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A

2) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة Ω منتصف القطعة $[BC]$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

0.5 | أ- تحقق من أن لحق النقطة Ω هو $\omega=7-2i$

0.75 | ب- بين أن : $z'=-iz+9+5i$

0.25 | ج- بين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R

التمرين الثالث (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}$ لكل n من IN

0.5 | 1) بين بالترجع أن : $u_n>1$ لكل n من IN

2) نضع : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ لكل n من IN

0.5 | أ - تحقق من أن : $1-v_n=\frac{2}{u_n+1}$ لكل n من IN واستنتج أن $1-v_n>0$ لكل n من IN

0.5 | ب- بين أن : $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$ لكل n من IN

1 | 3) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و اكتب v_n بدلالة n

0.5 | ب- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الرابع (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء
(نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1 | 1) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{1}{22}$

1 | 2) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{3}{44}$

1 | 3) بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.75 | 1) بين أن $f(-x)=-f(x)$ لكل x من $I\!R$ واستنتج أن النقطة O مركز تماثل للمنحنى (C)

0.5 | 2) تحقق من أن : $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ لكل x من $I\!R$
(يستحسن استعمال هذه الصيغة ل $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)

1.25 | 3) أ- بين أن $f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ لكل x من $I\!R$ و تحقق من أن : $f'(0)=\frac{3}{2}$

0.5 | ب- بين أن الدالة f تزايدية على $I\!R$

0.5 | ج- بين أن $y=\frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O

0.5 | 4) أ- بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.5 | ب- احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ واستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

0.25 | ج- بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D)

1.5 | 5) أنشئ المستقيمين (D) و (T) والمنحنى (C) (نذكر أن O هو مركز تماثل للمنحنى (C)) .

0.75 | 6) أ- بين أن الدالة $H:x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على $I\!R$

0.5 | ب- استنتج أن : $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\ln 4-\ln 3$

0.5 | ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$

AREF-Casa 717112 a 18 R 2

1) أ) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\-3 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}\neq\vec{0}$

المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) إذن : $(ABC):6x-3y+6z+d=0$ و بما أن $A(-3,0,0)\in(ABC)$ فإن $-18-0+0+d=0$ و بالتالي $d=18$ و منه $(ABC):6x-3y+6z+18=0$ أي $(ABC):2x-y+2z+6=0$

ب) $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega+6|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\dfrac{|2-1+2+6|}{\sqrt{9}}=3$

بما أن $d(\Omega,(ABC))$ تساوي شعاع الفلكة (S) فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

2) أ) لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ منظمية على المستوى (ABC) و $(D)\perp(ABC)$ إذن $\vec{u}$ موجهة ل (D) و حيث أن $\Omega(1,1,1)\in(D)$ فإن

$$(D):\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

ب) لدينا $\{H\}=(ABC)\cap(S)=(ABC)\cap(D)$

نفرغ التمثيل البارامتري للمستقيم (D) في المعادلة الديكارتية (ABC) :

$$2(1+2t)-(1-t)+2(1+2t)+6=0\Rightarrow 9t+9=0\Rightarrow t=-1$$

نعوض في التمثيل البرامتري للمستقيم (D) فنحصل على $\begin{cases}x_H=-1\\y_H=2\\z_H=-1\end{cases}$ أي $H\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

التمرين الثاني (3ن) :

1) أ) $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i}=\dfrac{6+4i}{4-6i}=\dfrac{3+2i}{2-3i}=\dfrac{i(2-3i)}{2-3i}=i$

ب) لدينا $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{c-a}{b-a}=i=\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

2) أ) لدينا Ω منتصف $[BC]$ إذن : $z_\Omega=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{6-7i+8+3i}{2}=7-2i$

ب) التمثيل العقدي للدوران R الذي مركزه Ω و زاوية $\dfrac{-\pi}{2}$ هو $R:z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)e^{i(\frac{-\pi}{2})}$

إذن $R:z'-(7-2i)=(z-(7-2i))\times(-i)$ و بالتالي : $R:z'=-iz+7i+2+7-2i$ ومنه $R:z'=-iz+9+5i$

ج) لدينا $-iz_A+9+5i=-i(2-i)+9+5i=-2i-1+9+5i=8+3i=z_c$ إذن $R(A)=C$

التمرين الثالث(3ن) :

$u_0=3\quad;\quad\forall n\in\mathbb{N}:u_{(n+1)}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}$

1) لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\rangle 1$

*من أجل $n=0$ لدينا $u_0=3\rangle 1$

*ليكن n من $\mathbb{N}$: نفترض أن $u_n\rangle 1$ أي أن $u_n-1\rangle 0$ (معطى) ثم لنبرهن أن $u_{(n+1)}-1\rangle 0$ (هدف)

لدينا : $u_{(n+1)}-1=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}-1=\dfrac{u_n-1}{3u_n+4}\rangle 0$ (لأن $u_n\rangle 1$)

خلاصة : حسب مبدأ الإستدلال بالترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_n\rangle 1$

2) $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) لدينا $1-v_n=1-\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{u_n+1-u_n+1}{u_n+1}=\dfrac{2}{u_n+1}$ وحيث أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\rangle 0$ فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1-v_n\rangle 0$

ب) ليكن n من $\mathbb{N}$: لدينا $1-v_n=\dfrac{2}{1+u_n}$ إذن $1+u_n=\dfrac{2}{1-v_n}$ أي $u_n=\dfrac{2}{1-v_n}-1=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

3) أ) ليكن n من $\mathbb{N}$: $v_{(n+1)}=\dfrac{u_{(n+1)}-1}{u_{(n+1)}+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{3u_n+4}}{\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4}+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{3u_n+4}}{\dfrac{7u_n+7}{3u_n+4}}=\dfrac{u_n-1}{7(u_n+1)}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\dfrac{1}{7}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{7}$

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}\quad ;\quad \forall n\in\mathbb{N}:v_n=v_0(q)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

ب) $\lim v_n=0$ (لأن $-1\langle\dfrac{1}{7}\langle 1$) إذن $\lim u_n=\lim\dfrac{1+v_n}{1-v_n}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

التمرين الرابع (3 ن) :

$card\Omega=C_{12}^3=220$

1) ليكن الحدث A : "الحصول على 3 كرات حمراء" لدينا $cardA=C_5^3=10$ إذن $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{1}{22}$

2) ليكن الحدث B : "الحصول على 3 كرات من نفس اللون " لدينا $cardB=C_5^3+C_4^3+C_3^3=15$ إذن $P(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{3}{44}$

3) ليكن الحدث C : " الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل " و ليكن الحدث $\overline{C}$: " عدم الحصول على أية كرة حمراء"

لدينا $card\overline{C}=C_7^3=35$ وبالتالي $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{card\overline{C}}{card\Omega}=1-\dfrac{35}{220}=\dfrac{37}{44}$

التمرين الخامس (8ن) :

$x\in\mathbb{R}\quad ;\quad f(x)=x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\quad f(-x)=-x+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\dfrac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)}=-x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\left(x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)$

إذن f دالة فردية و بالتالي منحناها متماثل بالنسبة لأصل المعلم

2) $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\quad x+1-\dfrac{2}{e^x+1}=x+\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=x+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$

3) أ) $\forall x\in\mathbb{R}\quad ;\quad f'(x)=\left(x+1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)'=1+\dfrac{2\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1+\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ (f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$)

$f'(0)=1+\dfrac{2}{(1+1)^2}=1+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}$

ب) لدينا $f'(x)=1+\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ و $e^x\rangle 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$: إذن $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)\rangle 0$ و بالتالي f تزايدية (قطعا) على $\mathbb{R}$

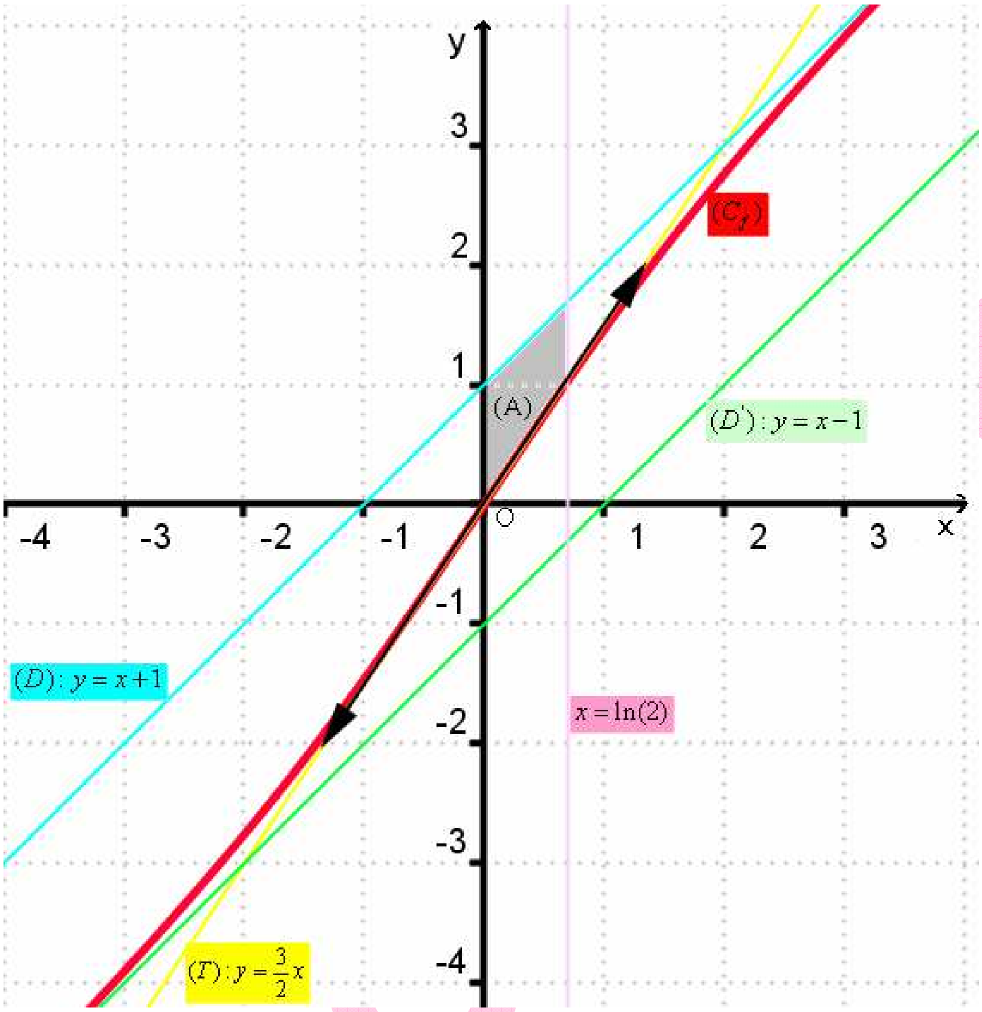
ج) $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{3}{2}x+0=\dfrac{3}{2}x$

4) أ) لدينا $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} x+1-\dfrac{2}{e^x+1}=+\infty$ $(\lim\limits_{+\infty} e^x=+\infty)$

ب) لدينا $\lim\limits_{+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{-2}{e^x+1}=0$ إذن المستقيم $(D):y=x+1$ مقارب مائل لمنحنى f بجوار $+\infty$

ج) لدينا $\forall x\in \mathbb{R} \;:\; f(x)-(x+1)=\dfrac{-2}{e^{x}+1}<0$ إذن منحنى f يوجد تحت المستقيم (D)

5)



6) أ) الدالة H قابلةللإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R} : H'(x)=1-\dfrac{(e^{x}+1)'}{e^{x}+1}=1-\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{1}{e^{x}+1}$ إذن H أصلية

للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{e^{x}+1}$ على $\mathbb{R}$

ب) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)}\frac{1}{e^{x}+1}dx=H(\ln(2))-H(0)=\ln(2)-\ln(3)+\ln(2)=2\ln(2)-\ln(3)=\ln(4)-\ln(3)$

ج) $1\text{unité}=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|="UA"$ (وحدة قياس المساحة)

$$(A)=\int_0^{\ln(2)}(x+1)-f(x)dx\times"UA"=2\int_0^{\ln(2)}\frac{1}{e^{x}+1}dx\times"UA"=2\ln(4)-2\ln(3)"UA"=2\ln(\frac{4}{3})"UA"$$

xyzwak@hotmail.com
https://sites.google.com/site/wakrimieleves