الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

1) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها هو 5 . — 0.5

2) أ – بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ واستنتج أن $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . — 1

ب – احسب $d\left(\Omega,(ABC)\right)$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) . — 0.5

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC).

أ – بين أن : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \quad (t\in I\!R) \\ z=3+3t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . — 0.5

ب – بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$. — 0.25

ج – تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S) . — 0.25

التمرين الثاني (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$ — 1

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

أ – بين أن $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. — 0.5

ب – تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R . — 0.25

ج – بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي . — 0.75

د – استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع . — 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : ① و ① و ① و ② و ② و ② و ③ و ③

(لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1) ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " . — 1.25

و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .

بين أن $P(A)=\frac{3}{28}$ وأن $P(B)=\frac{13}{28}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

أ – حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X . — 0.25

ب – بين أن : $P(X=1)=\frac{15}{28}$. — 0.75

ج – أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X . — 0.75

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $I\!N$.

0.5 | 1) بين أن : $u_n>0$ لكل n من $I\!N$.

0.75 | 2) بين أن : $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $I\!N$.

0.5 | 3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة .

0.75 | 4) أ- بين بالترجع أن : $u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $I\!N^*$.

0.5 | ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الخامس (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

0.25 | 1) أ- تحقق من أن $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 | ب - بين أن : $g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.25 | 2) أ - تحقق من أن $\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 | ب - استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$.

0.5 | 3) أ - بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ وأنها تزايدية على $[1,+\infty[$.

0.5 | ب - استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)>0$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$) .

1 | 1) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$.

0.5 | 2) أ - بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

0.75 | ب - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ ثم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$) .

0.5 | ج - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0.5 | 3) بين أن $y=3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$.

0.75 | 4) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

1 | 5) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن: $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x)=\frac{1}{x^2}$ و $v(x)=\ln x$) .

0.5 | ب - بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.