التمرين الأول

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط: $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,-2)$ و $C(3,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$.

1 . تحديد مركز وشعاع الفلكة (S) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2\times1\times x+1-1+y^2+z^2-2\times1\times z+1-1-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2-3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

إذن : (S) فلكة مركزها : $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها : $R=\sqrt{3}$

2 . أ ـ لنبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,2)$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\left(0-(-1)\right)\vec{i}-(-2+2)\vec{j}+(-1-0)\vec{k}$$
$$=\vec{i}-\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$

✓ تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

- لدينا A و B و C نقط غير مستقيمية (إما باستعمال المحددات المستخرجة للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و إما بملاحظة أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$) .
- حسب تعريف الجداء المتجهي ؛ لدينا حامل المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) ومنه المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) . إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $1\times x+0\times y+(-1)\times z+d=0$ حيث d $\mathbb{R}$

وبما أن $A(1,1,-1)$ تنتمي إلى (ABC) فإن : $x_A+0\times y_A-z_A+d=0$

أي : $1+0+1+d=0$

أي : $d=-2$

وبالتالي : $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

✍ طريقة ثانية

- نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC).

• لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\times1+y\times0+(z+1)\times(-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-1+0-z-1=0$$
$$\Leftrightarrow x-z-2=0$$

إذن : $(ABC):x-z-2=0$

ب- حساب المسافة بين النقطة Ω والمستوى (ABC) .

لدينا : $\Omega(1,0,1)$ و $(ABC):x-z-2=0$

ومنه :
$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|x_\Omega-z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|1-1-2|}{\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt2$

❖ تقاطع الفلكة (S) والمستوى (ABC)

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt2$ و شعاع الفلكة $R=\sqrt3$.

بما أن : $\sqrt2<\sqrt3$ ؛ فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$

أي : $r=\sqrt{3-2}=\sqrt1=1$.

إذن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=1$

3 . ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC)

أ- تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

لدينا : (Δ) عمودي على المستوى (ABC) ؛ إذن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ متجهة موجهة له .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow(\exists t\in\mathbb{R})/\overrightarrow{\Omega M}=t.\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow(\exists t\in\mathbb{R})/\begin{cases}x=3+3t\\y=1+0\times t\\z=0+4t\end{cases}$$

إذن النظمة :

$\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ هي تمثيلا بارامتري لـ (Δ)

ب- تحديد مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow (\exists t\in\mathbb{R}) : \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \\ x-z-2=0 \end{cases}$$

ومنه : $(1+t)-(1-t)-2=0$

يعني : $2t-2=0$. أي : $t=1$

وبالتالي : $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\boxed{\text{إذن : المستقيم } (\Delta) \text{ يقطع الفلكة } (S) \text{ في النقطة : } H(2,0,0)}$

ج- استنتاج مركز الدائرة (Γ)

- الدائرة (Γ) هي تقاطع الفلكة (S) والمستوى (ABC)
- مركز الدائرة (Γ) هو المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (ABC).

بماأن (Δ) عمودي على (ABC) ومار من Ω فإن النقطة $H(2,0,0)$ (تقاطع (Δ) و (ABC))
هي مركز الدائرة (Γ)

خلاصـــة

$\boxed{(ABC) \text{ يقطع الفلكة } (S) \text{ وفق الدائرة } \Gamma(H(2,0,0);r=1)}$

التمرين الثاني

1 . لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-12z+61=0$.

مميز المعادلة $z^2-12z+61=0$ هو : $\Delta=b^2-4ac$ حيث : $a=1$ و $b=-12$ و $c=61$

إذن : $\Delta=(-12)^2-4\times1\times61=144-244=-100=(10i)^2$.

وبالتالي للمعادلة المقترحة حلين عقدين مترافقين :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2}=\frac{12-i\sqrt{100}}{2}=6-5i \quad \text{و} \quad z_2=\overline{z_1}=6+5i$$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{6-5i\ ;\ 6+5i\}}$$

.2 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ؛ النقط : A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=6-5i$ و $b=4-2i$ و $C=2+i$.

أ- حساب $\dfrac{a-c}{b-c}$

لدينا : $$\frac{a-c}{b-c}=\frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i}=\frac{4-6i}{2-3i}=\frac{2\cancel{(2-3i)}}{\cancel{(2-3i)}}=2$$

✓ الاستنتاج

بما أن : $\dfrac{a-c}{b-c} = 2 \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

✍ طريقة ثانية :

بما أن : $\dfrac{a-c}{b-c}=2$ فإن : $\arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)\equiv 0[2\pi]$ يعني : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv 0[2\pi]$

ومنه $\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان وبالتالي : A و B و C نقطا مستقيمية.

ب ـ نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو $1+5i$

تحديد لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T.

لدينا : $T(C)=D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\vec{u}$

ومنـــه : $z_D-z_C=z_{\vec{u}}$ يعني : $d=1+5i+2+i = 3+6i$

إذن: لحق النقطة D هو $d=3+6i$

✍ ملاحظة .

يمكن استعمال الإحداثيات في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم م.م.م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

لدينا : $C(2,1)$ و $\vec{u}(1,5)$ و $D(x,y)$ حيث : x y عددان حقيقيان.

بما أن $T(C)=D$ فإن : $\overrightarrow{CD}=\vec{u}$ ومنه : $\begin{cases} x-2=1 \\ y-1=5 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$

إذن : $D(3,6)$ أي : $d=3+6i$

ج ـ لنبين أن $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$

لدينا :
$$\begin{aligned}\frac{d-c}{b-c} &= \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i}\\ &=\frac{1+5i}{2-3i}\\ &=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}\\ &=\frac{-13+13i}{13}\\ &=-1+i\end{aligned}$$

إذن : $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$

✓ تحديد عمدة العدد العقدي $-1+i$:

لدينا : $|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

إذن : $-1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

وحيث أن : $\begin{cases} Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ Sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ فإن : $\arg(-1+i)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

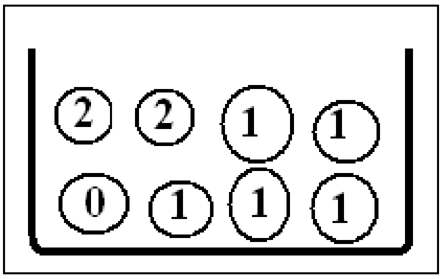
د ـ استنتاج قياسا للزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$.

لدينا : $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right)[2\pi]$.

$\equiv\arg(-1+i)[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2.ج أعلاه)

$\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

إذن: **قياسا** للزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)$ هو : $\frac{3\pi}{4}$.



التمرين الثالث

يحتوي كيس على ثماني بيدقات : بيدقة تحمل العدد 0 و خمس بيدقات تحمل العدد 1 ؛ و بيدقتان تحملان العدد 2 . لايمكن التمييز بينها باللمس)

➢ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس

1 . نعتبر الحدث : A : " الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعداد مختلفة مثنى مثنى "

يعني الحصول على بيدقة تحمل العدد 0 و بيدقة تحمل العدد 1 و بيدقة تحمل العدد 2 ⓪①②

الكرات لايمكن التمييز بينها باللمس إذن هناك فرضية تساوي الاحتمالات

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية . بما أن السحب تآني فإن كل سحبة فهي تأليفة لـ 3 عناصر من بين 8 عناصر .

إذن $card(\Omega)=C_8^3=56$

✓ لنبين أن : $P(A)=\frac{5}{28}$

✓ لدينا : $card(A)=C_1^1\times C_5^1\times C_2^2=1\times5\times2=10$

وبالتالي : $P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

2. نعتبر الحدث B : " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5 "

يعني : بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة تحمل العدد 1 : ②②①

✓ لدينا : $Card(B)=C_2^2\times C_5^1=1\times5=5$

وبالتالي : $P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{5}{56}$

3. نعتبر الحدث C : " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 "

يعني : بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة تحمل العدد 0 ⓪②② ويتم ذلك ب: $C_2^2 \times C_1^1$ كيفية

أو بيدقتان تحملان العدد 1 و بيدقة تحمل العدد 2 ②①① ويتم ذلك ب: $C_5^2 \times C_2^1$ كيفية

✓ لدينا : $Card(C) = C_2^2 \times C_1^1 + C_5^2 \times C_2^1 = 1 + 20 = 21$

وبالتالي : $P(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{21}{56} = \dfrac{3}{8}$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1 . لنتحقق من أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$.

ليكن n $\mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 12 &= \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 \\ &= \frac{10}{11}u_n + 12\left(\frac{1}{11} - 1\right) \\ &= \frac{10}{11}u_n + \frac{12 \times (-10)}{11} \\ &= \frac{10}{11}(u_n - 12) \end{aligned}$$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$

2 . أ ـ لنبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 12$

✓ من أجل $n = 0$

لدينا : $u_0 = 11 < 12$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ لتكن n $\mathbb{N}$

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي نفترض أن : $u_n < 12$ ونبين أن $u_{n+1} < 12$ ؟

♦ لدينا : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ ب الـ سؤال (1

♦ حسب الافتراض؛ لدينا : $u_n < 12$ ومنه $u_n - 12 < 0$

وبالتالي : $u_{n+1} - 12 < 0$ أي : $u_{n+1} < 12$

إذن : حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 12$

ب ـ لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

ليكن n $\mathbb{N}$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}-u_n$

$$=u_n\left(\frac{10}{11}-1\right)+\frac{12}{11}$$

$$=\frac{-1}{11}u_n+\frac{12}{11}$$

$$=\frac{1}{11}(12-u_n)$$

بما أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n<12$ فإن : $\forall n\in\mathbb{N}:12-u_n>0$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}-u_n>0$

والتالي المتتالية : (u_n) تزايدية قطعا .

ج- تقارب المتتالية (u_n)

لدينا (u_n) متتالية تزايدية و مكبورة إذن فهي متقاربة

3. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $\mathrm{v}_n=u_n-12$: لـ كل $\mathbb{N}$

أ- • لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{10}{11}$

لتكن n $\mathbb{N}$

لدينا : $\mathrm{v}_{n+1}=u_{n+1}-12$ وحيث أن : $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ ب ال سؤال 1)

فإن : $\mathrm{v}_{n+1}=\frac{10}{11}\mathrm{v}_n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{v}_{n+1}=\frac{10}{11}\mathrm{v}_n$. أي : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{10}{11}$

وحدها الأول $\mathrm{v}_0=u_0-12=11-12=-1$

• كتابة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية ؛ حسب صيغة الحد العام لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{v}_n=\mathrm{v}_0\times(q)^n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{v}_n=-1\times\left(\frac{10}{11}\right)^n$

ب- • لنبين $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ n $\mathbb{N}$

لتكن n $\mathbb{N}$

لدينا : $\mathrm{v}_n=u_n-12\Rightarrow u_n=\mathrm{v}_n+12$

$$\Rightarrow u_n=-\left(\frac{10}{11}\right)^n+12$$

إذن : $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$

♦ النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $u_n = 12-\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ وبما أن : $-1<\dfrac{10}{11}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{10}{11}\right)^n = 0$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(12-\left(\dfrac{10}{11}\right)^n\right) = 12$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$

التمرين الرابع

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$

1. لنبين أن : x^2-1 و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0,1[$

♦ لدينا : $x\in]0,1[\Leftrightarrow 0<x<1$

$\Leftrightarrow 0<x^2<1$

ومنه : $\forall x\in]0,1[\ : x^2-1<0$

♦ نعلم أن : $\forall x\in]0,1[\ : x^2>0$ و $\forall x\in]0,1[\ : \ln x<0$

إذن : $\forall x\in]0,1[\ : 2x^2\ln x<0$

وبالتالي : x^2-1 و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة. (ب ين معا) على المجال $]0,1[$

✓ الاستنتاج :

لكل x من $]0,1[$ لدينا : $x^2-1<0$ و $2x^2\ln x<0$

ومنه : $\forall x\in]0,1[\ : g(x)<0$ (ن : $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$)

ولدينا : $g(1)=1^2-1+2\times1^2\times\ln(1)=0$ إذن : $\forall x\in]0,1]\ : g(x)\le 0$

2. لنبين أن : x^2-1 و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على المجال $]1,+\infty[$

♦ لدينا : $x\in]1,+\infty[\Leftrightarrow x>1$

$\Leftrightarrow x^2>1$

ومنه : $\forall x\in]1,+\infty[\ : x^2-1>0$

♦ نعلم أن : $\forall x\in]1,+\infty[\ : x^2>0$ و $\forall x\in]1,+\infty[\ : \ln x>0$

إذن : $\forall x\in]1,+\infty[\ : 2x^2\ln x>0$

وبالتالي : x^2-1 و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة (ب ين معا) على المجال $]1,+\infty[$

✓ الاستنتاج :

لكل x من $]1,+\infty[$ لدينا : $x^2-1>0$ و $2x^2\ln x>0$

ومنه : $\forall x\in]1,+\infty[\ : g(x)>0$ (ن : $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$)

ولدينا : $g(1)=1^2-1+2\times1^2\times\ln(1)=0$.

إذن : $\forall x\in]1,+\infty[\ : g(x)\geq 0$

✍ ملاحظة .

يمكن استعمال جداول الإشارة في السؤالين 1 و 2

II . لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(x^2-1)\ln x$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=3cm$)

1 . أ ـ حساب النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

♦ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left((x^2-1)\ln x\right)$

وحيث أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x=-\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-1)=-1$

فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=(-1)\times(-\infty)=+\infty$.

♦ التأويل الهندسي :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=0$ (الأراتيب) مقارب لـ $(\mathscr{C}_f)$

ب ـ ♦ حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

♦ لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

لدينا : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(x^2-1)\ln x}{x}=\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

♦ الاستنتاج :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2. أ ـ لنبين أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ ,f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ليكن x $\left]0,+\infty\right[$.

لدينا : $f'(x)=\left(\left(x^2-1\right)\ln x\right)'$ أذكر أن : $\left((u.\mathrm{v})'=u'.\mathrm{v}+u.\mathrm{v}'\right)$

$$=\left(x^2-1\right)'\times\ln x+\left(x^2-1\right)\times(\ln x)'$$

$$=2x\times\ln x+\left(x^2-1\right)\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)+2x^2\ln x}{x}$$

$$=\frac{g(x)}{x}$$

إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x $\left]0,+\infty\right[$

♦ التأويل الهندسي للنتيجة $f'(1)=0$

لدينا : f دالة قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ كجداء دالتي قابلتين للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1)=\frac{g(1)}{1}=\frac{0}{1}=0$

إذن : المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماس في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$ معادلته :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=0$ (لأن $f'(1)=0$ و $f(1)=0$)

أي $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماس أفقي في النقطة ذات الإحداثيات $(1,0)$.

ب ـ رتابة الدالة f على كل من المجالين $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

♦ حسب نتيجة السؤال ـ 1 ـ الجزء الأول ؛ لدينا : $x>0$ و $\forall x\in]0,1]:\ g(x)\leq 0$

ومنه : $\forall x\in]0,1]: f'(x)\leq 0$

وبالتالي : f تناقصية على المجال $]0,1]$

♦حسب نتيجة السؤال - 2 - الجزء الأول ؛ لدينا : $x>0$ و $\forall x\in[1,+\infty[:\ g(x)\geq 0$

ومنه : $\forall x\in[1,+\infty[: f'(x)\geq 0$

وبالتالي : f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

ج – جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

✓ الاستنتاج

- من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f تقبل قيمة دنيا مطلقة على المجال $]0,+\infty[$ عند $x_0=1$

يعني : $\forall x\in]0,+\infty[\ : f(x)\geq f(1)$ أي : $\forall x\in]0,+\infty[\ : f(x)\geq 0$ (لأن : $f(1)=0$)

- يمكن أيضا استعمال تعريف تزايدية وتناقصية دالة

➢ $x\in]0,1]\Rightarrow x\leq 1$

$\Rightarrow f(x)\geq f(1)$ (f تناقصية على المجال $]0,1]$)

$\Rightarrow f(x)\geq 0$

إذن : $\forall x\in]0,1]\ : f(x)\geq 0$ ①

➢ $x\in[1,+\infty[\Rightarrow x\geq 1$

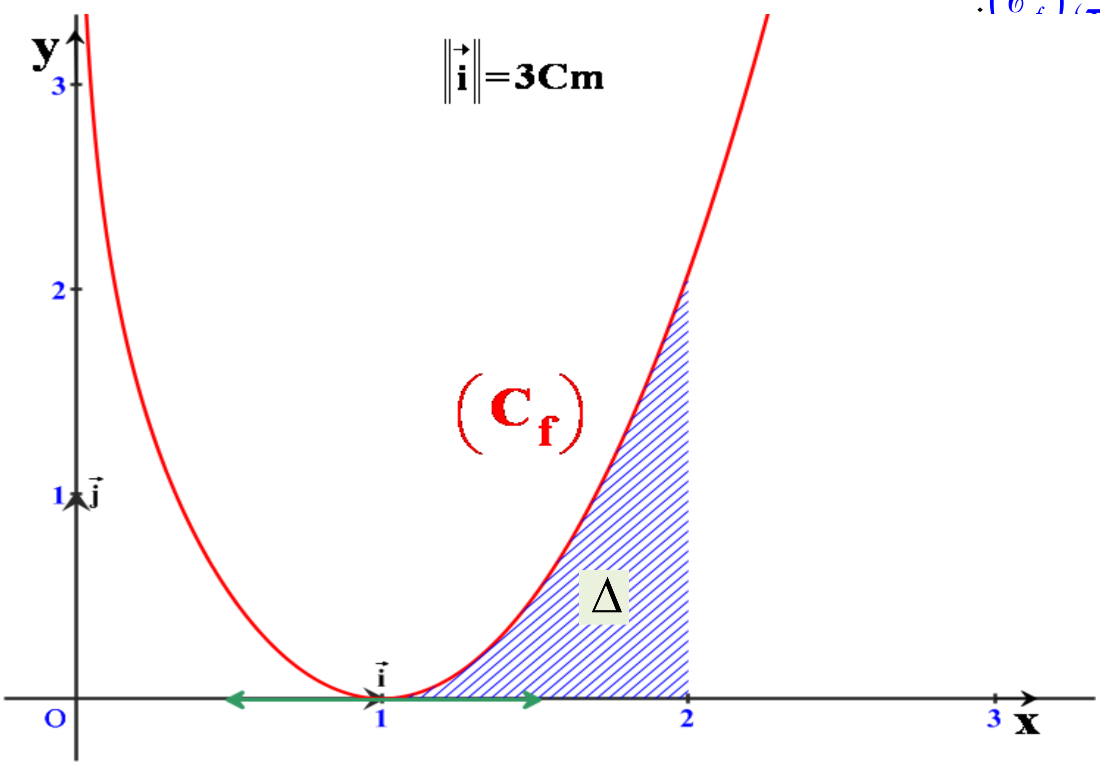
$\Rightarrow f(x)\geq f(1)$ (f تزايدية على المجال $[1,+\infty[$)

$\Rightarrow f(x)\geq 0$

إذن : $\forall x\in[1,+\infty[\ : f(x)\geq 0$ ②

من ① ② نستنتج أن : $\forall x\in]0,+\infty[\ : f(x)\geq 0$.

3 . إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.



4 . أ ـ لنبين أن : $u:x\mapsto\dfrac{x^3}{3}-x$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto x^2-1$ على $\mathbb{R}$

لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية ؛ و $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ u'(x)=x^2-1$

ومنه : $u:x\mapsto\dfrac{x^3}{3}-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

ب ـ حساب التكامل : $\int_1^2 (x^2-1)\ln(x)dx$

نضع : $\begin{cases}u'(x)=x^2-1\\ \text{v}(x)=\ln x\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}u(x)=\dfrac{x^3}{3}-x\\ \text{v}'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$

u v قابلتان للاشتقاق على $[1;2]$ بحيث : u' v' متصلتين على $[1;2]$

إذن :
$$\int_1^2 (x^2-1)\ln x dx=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{1}{x}dx$$
$$=\left(\frac{2^3}{3}-2\right)\ln(2)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)\ln(1)-\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}\ln(2)-0-\left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}\ln(2)-\left(\frac{8}{9}-2\right)+\left(\frac{1}{9}-1\right)$$
$$=\frac{2}{9}(1+3\ln(2))$$

إذن : $\int_1^2 (x^2-1)\ln x dx=\dfrac{2}{9}(1+3\ln(2))$

ج ـ مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=2$

• وحدة قياس المساحة هي : $ua=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=9.Cm^2$

• لدينا : $\mathcal{A}(\Delta)=\int_1^2 |f(x)|dx\ .ua$

• حسب السؤال : II . 2 ـ ج لدينا : $f(x)\geq 0$ على المجال : $]0,+\infty[$ ومنه $f(x)\geq 0$ على المجال : $[1,2]$

وبالتالي : $|f(x)|=f(x)$

إذن : $\mathcal{A}(\Delta)=\int_1^2 |f(x)|dx\ .ua$
$$=\int_1^2 f(x)dx\ .ua$$

$$= \frac{2}{9}\left(1+3\ln 2\right)\times 9.Cm^2$$
$$= 2\left(1+3\ln 2\right).Cm^2$$

إذن :
$$\mathcal{A}\left(\Delta\right) = 2\left(1+3\ln 2\right).Cm^2$$
$$\simeq 6,158.Cm^2$$