044

(الأسئلة مستقلة فيما بينها).

1) أكتب العدد $A=\ln(3\sqrt{3})+\ln(81)+\ln(12\sqrt[3]{3})$ بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$.

2) تفقد سيّارة $15\ \%$ من قيمتها كلّ سنة، بعد كم سنة ستفقد نصف قيمتها ؟

3) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_1 : \ln(5-x)+\ln(1-x) > 2\ln(x+1)$.

4) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_2 : \ln(3x+2) < 0$.

5) حدّد مجموعتي تعريف الدالّتين: $a(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ و $b(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$.

6) حدّد دالة أصلية ل: $c(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ و $d(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2}$.

7) أحسب $B=\log_2(\frac{1}{5})+\log_2(10)+\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3})$.

8) أحسب $C=\log(250000)+\log(\sqrt{250})-\log(125)$.

9) حلّ المعادلة: $E_1 : \log_3(2x-1)-\log_3(x)=1$.

10) بيّن أنّ النّقطة $A(-\frac{1}{2},0)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة $f(x)=\ln(\dfrac{x}{x+1})$.

11) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_2 : (0,5)\ln(x-1)+\ln(\sqrt{x+2})=\ln 2$.

12) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_3 : (\ln x)^2+5(\ln x)-6\le 0$.

13) لتكن: $U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{U_n}{e}}$ و $U_1=e^2$ و $V_n=\dfrac{1+\ln(U_n)}{2}$ ، $n\ge 1$.
بيّن أنّ $(V_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأول.

14) أحسب $D=\log(2+\sqrt{3})+\log(2-\sqrt{3})-\log(4)+\log(2)\log(100)$.

15) حدّد دالة أصلية ل: $e(x)=\dfrac{4x+3}{2x^2+3x-1}$ ، $g(x)=\tan x$ ، $h(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

16) تقدّر ساكنة مدينة هذه السنة ب 81000 نسمة، نسبة تزايدها سنوياً هي $2,6\ \%$.
كم من السنوات يلزم هذه الساكنة حتى تصبح 162000 نسمة ؟

17) حدّد مجموعة تعريف الدالة: $\ell(x)=\sqrt{2-(\ln x)^2}$.

18) لتكن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $0,2$ و حدّها الأوّل $v_0=25$.
تحقّق أنّ المتتالية: $u_n=\log_5(v_n)$ ، حسابية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل.

045

أحسب النهايات التالية:

$$A=\lim_{+\infty}\frac{(\ln x)^7}{x^4}\ ;\ B=\lim_{+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^8}\ ;\ C=\lim_{0+}x(\ln x)^4\ ;\ D=\lim_{0+}x^5\ln x$$

$$E=\lim_{+\infty}\frac{x-3\ln x}{2x-\ln x}\ ;\ F=\lim_{-\infty}(x+\ln(x^2+1))\ ;\ G=\lim_{(-1)+}\ln(\frac{3-x}{x+1})$$

$$H=\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})\ ;\ I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt[5]{x}}\ ;\ J=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x-x^2)}{x}$$

046

نعتبر الدالة: $f(x)=x(\ln x-1)^2$ و $f(0)=0$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to0+}x(\ln x)^2=0$

2) بيّن أنّ f متّصلة في 0^+ و أدرس قابلية اشتقاقها في 0^+ و أعط تأويلاً هندسياً.

3) أ) بيّن أنّ $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$ و أعط جدول التغيّرات.
ب) حدّد الفرع اللانهائي و أنشئ C_f . نأخذ: $e^{-1}\ne 0,4$ و $e\approx 2,7$.

047

(بكالوريا وطنية 2004 / 2005 د ع)

الجزء الأوّل: $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$ حيث $x>0$.

1) أ) أحسب $g'(x)$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$ ثمّ أدرس منحى تغيّرات g .
ب) استنتج أنّ $g(x)\ge 0$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$.

2) أ) بيّن أنّ: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$.
ب) بيّن أنّ: $(x-1)\ln x\ge 0$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$.

3) استنتج أنّ: $h(x)>0$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$.

الجزء الثّاني: نعتبر الدالة $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$ حيث $x\in]0\,;+\infty[$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ ثمّ أوّل النّتيجة مبيانياً ثمّ أحسب $\lim\limits_{+\infty}f(x)$
ب) حدّد الفرع اللانّهائي ل C_f جوار $+\infty$. لاحظ $f(x)=1+x\ln x(1-\dfrac{\ln x}{x})$

2) بيّن أنّ: $\forall x>0 : f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$ و استنتج أنّ f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^{+*}$.

3) أ) بيّن أنّ $y=x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المماسّ ل C_f في $A(1\,;1)$
ب) تحقّق من أنّ $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ لكلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$.
ج) أدرس إشارة $f(x)-x$ ثمّ استنتج الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم (Δ) .

4) أنشئ C_f و (Δ) (نقبل أنّ ل C_f نقطة انعطاف أفصولها بين 1 و 1,5).

الجزء الثّالث: المتتالية (u_n) بحيث: $u_0=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكلّ n من $\mathbb{N}$

1) بيّن بالترجّع أنّ: $1<u_n<e$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تناقصية. يمكنك استعمال السّؤال 3) ج) من الجزء الثّاني

3) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ أحسب نهايتها.

048

(بكالوريا 1995/1996)

I) لتكن: $g(x)=2x^2+1-\ln x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}g(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

2) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول تغيرات g ثمّ استنتج أنّ: $\forall x>0 : g(x)>0$.

II) لتكن: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in]0;+\infty[$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و حدّد مقاربَي C_f .

2) بيّن أنّ: $f'(x)=x^{-2}\cdot g(x)$ و ضع جدول التغيرات.

3) حدّد $f''(x)$ و حدّد نقطة الانعطاف ثمّ أنشئ C_f ، $e^{1,5}\approx 4,5$ و $f(e^{1,5})\approx 7,3$

049

$f(x)=\ln(\dfrac{x}{2-x})$: $x\in]0\,;2[$. (بكالوريا وطنية 2004 / 2005 د س)

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2-}f(x)$.
ب) بيّن أنّ $f'(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}$ لكلّ x من $]0\,;2[$ و أعط جدول تغيّرات f .

2) بيّن أنّ $A(1\,,0)$ مركز تماثل ل C_f و أكتب معادلة (T) المماس ل C_f في A

3) نضع $\varphi(x)=f(x)-x$ لكلّ x من المجال $]0\,;2[$.
أ) بيّن أنّ $\varphi(1,5)<0$ و $\varphi(1,75)>0$ (نأخذ $\ln 3\approx 1,1$ و $\ln 7\approx 1,94$).
ب) استنتج أنّ المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً α : $1,5<\alpha<1,75$ و أوّل النّتيجة.

4) بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية و أنشئ في نفس المعلم (C_f) و المنحنى $(C_{f^{-1}})$.

050

بكالوريا وطنية 2005 / 2006 د ع

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0\,,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1) أ) أحسب $g'(x)$ ثمّ بيّن أنّ g تناقصية قطعاً على $[0\,,+\infty[$.

ب) استنتج أنّ: $g(x)\le 0$ لكلّ x من $[0\,,+\infty[$.

2) بيّن أنّ: $0<\ln(1+x)<x$ لكلّ x من $]0\,,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة: $f(x)=x+\ln(\frac{x+1}{x-1})$.

1) بيّن أنّ حيّز تعريف f هو $D=]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[$ و أنّ f دالة فردية.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

3) بيّن أنّ: $\forall x\in D:\ f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$ و استنتج تغيّرات f على $]1\,,+\infty[$.

4) أ) تحقّق أنّ المستقيم $(\Delta):\ y=x$ مقارب مائل ل C_f .

ب) أدرس إشارة $\ln(\frac{x+1}{x-1})$ (يمكن ملاحظة أنّ $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$ $\forall x\in D$)

ج) استنتج الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم (Δ) .

5) أنشئ C_f الوحدة $1cm$ نأخذ: $\sqrt{3}\approx1{,}7$ و $f(\sqrt{3})\approx3$.

III) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge2}$ بحيث: $u_n=f(n)-n$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

1) تحقّق أنّ $u_n=\ln(1+\frac{2}{n-1})$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ ثمّ بيّن أنّ $(u_n)_n$ تناقصية.

2) بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}:0<u_n<\frac{2}{n-1}$ (استعمل (I 2)) ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

051

$f(x)=\ln(x^2-2x+2)$. **(بكالوريا وطنية 2003 / 2004 د س)**

1) حدّد $D_f=\mathbb{R}$ ثم أحسب: $\lim\limits_{+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty}f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم $x=1$ محور تماثل C_f

3) أ) تحقّق أنّ: $f(x)=2\ln(x)+\ln(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})$ لكلّ x من $[1,+\infty[$.

ب) استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x)=0$ ثمّ أوّل النّتيجة هندسياً.

4) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$ و أعط جدول التغيّرات.

5) بيّن أنّ: $f''(x)=\frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$ و أدرس تقعّر C_f ثمّ أنشئ C_f .

6) ليكن h قصور f على $[1,+\infty[$، بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية و حدّد $h^{-1}(x)$.

052

$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^3) & x<0\\ 4x\sqrt{x}-3x^2 & x\ge0\end{cases}$. **(بكالوريا وطنية 2002 / 2003 د ع)**

1) بيّن أنّ f متصلة و قابلة للاشتقاق في 0 (نذكّر أنّ: $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$).

2) بيّن أنّ f تناقصية على $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تزايدية على المجال $[0,1]$.

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) تحقّق أنّ: $\forall x<0:\ \frac{f(x)}{x}=3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$.

ج) أدرس الفرعين اللانهائيين و أنشئ المنحنى (C_f) .

4) لتكن h قصور f على $]-\infty,0]$. بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد صيغة $h^{-1}(x)$ $x\in J,$.

5) أ) $u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^{\,2}$ و $u_0=\frac{4}{9}$. بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ \frac{4}{9}\le u_n\le1$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تزايدية و استنتج أنّها متقاربة ثم أحسب نهايتها.

053

(بكالوريا 1993/1994)

A) لتكن g المعرّفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\frac{-2}{x+2}+\ln(\frac{x+2}{x})$

بيّن أنّ: $g'(x)=-4\cdot[x(x+2)^2]^{-1}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

B) لتكن f المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ ب: $f(x)=x\cdot\ln(\frac{x+2}{x})$ و $f(0)=0$

1) بيّن أنّ f متصلة في 0^+ و أدرس قابلية اشتقاقها في 0^+ ثم أعط تأويلاً هندسياً.

2) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ (ضع $X=2/x$).

3) بيّن أنّ: $\forall x>0:f'(x)=g(x)$ و ضع جدول تغيرات f .

4) حدّد تقعّر C_f ثمّ أنشئ المنحنى C_f في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$، الوحدة $2cm$.

054

(بكالوريا وطنية 2006 2007 د س)

I) لتكن $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$ حيث $x\in]0\,,+\infty[$.

1) بيّن أنّ $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثمّ استنتج منحى تغيّرات g على $]0\,,+\infty[$.

2) بيّن أنّ $\forall x\in]0,1]:\ g(x)\le0$ و أنّ $\forall x\in[1,+\infty[:\ g(x)\ge0$ $g(1)=0$

II) نعتبر الدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ حيث $x\in]0\,,+\infty[$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) تحقّق أنّ $f(1/x)=f(x)$ لكلّ x من $]0\,,+\infty[$.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ (يمكن وضع $t=1/x$) ثمّ أوّل النتيجة مبيانياً.

د) بيّن أنّ C_f يقبل فرعا شلجمياً اتجاهه المقارب هو المستقيم $y=x$.

2) بيّن أنّ $\forall x>0:\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ و ضع جدول تغيّرات f ثمّ أنشئ C_f .

3) بيّن أنّ الدالة $G(x)=x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $]0\,,+\infty[$.

055

(بكالوريا وطنية 2002 / 2003 د س)

الجزء الأول: لتكن الدالة: $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$: $x\in\mathbb{R}^+$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و أدرس قابلية اشتقاق f في 0^+ .

2) بيّن أنّ f تناقصية على $[0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$.

الجزء الثّاني: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=2$.

1) بيّن بالترجّع أنّ: $1\le u_n\le2$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تناقصية و استنتج أنّها متقاربة ثم أحسب نهايتها.

الجزء الثّالث: لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب: $g(x)=\ln(x-2\sqrt{x}+2)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g) .

2) أدرس تغيرات g، (نقبل أنّ $\lim\limits_{x\to0+}(\frac{g(x)-g(0)}{x}=-\infty$) و أنشئ (C_g) .

3) لتكن h قصور g على $[1,+\infty[$. بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد صيغة $h^{-1}(x)$ $x\in J,$