تمارين الأعداد العقدية

تمرين 1 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

-1 $z^2-2\overline{z}+1=0$, **-2** $\overline{z}^2+2z-1=0$, **-3** $z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2=0$

تمرين 2 :

حدد مجموعة النقط $\eta(z)$ من الحالات التالية:

-1 $\frac{z+1}{z-i}\in\mathbb{R}$, **-2** $|z-1+i|=|z|$, **-3** $\left|\frac{z+1}{z-i}\right|=0$

تمرين 3 :

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألحاقها : $z_A=4+2i$ و $z_B=1-3i$ و $z_C=-2$

-1 حدد لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$

-2 حدد لحق النقطة D إذا علمت أن $ABCD$ متوازي أضلاع

تمرين 4 :

في المستوى العقدي نعتبر النقط A و B و C و A' و B' و C' التي ألحاقها هي :

$z_A=1-i$ و $z_B=2+3i$ و $z_C=3+i$

$z_{A'}=-1+3i$ و $z_{B'}=3-i$ و $z_{C'}=4+i$

(a بين أن : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

(b بين أن G و G' مركزي ثقل المثلثين $A'B'C'$ و ABC على التوالي منطبقين.

تمرين 5 :

أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل ألمثلثي العدد : $Z=\left(-\sqrt{3}+i\right)(1-i)$

ثم استنتج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ ، $\sin\frac{7\pi}{12}$

تمرين 6 :

من المستوى العقدي A و B و C التي ألحاقها : $z_A=i$ و $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ على التوالي نعتبر النقط

بين أن المثلث ABC متساوي أضلاع

تمرين 7 :

A و B و C و E نقط ألحاقها على التوالي :

$a=2-2i$ ، $b=-4-2i$ ، $c=4+2i$ ، $e=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

قارن العددين : $\frac{c-e}{a-e}$ و $\frac{a-e}{b-e}$. ماذا يمكنك استنتاجه بالنسبة للزوايا $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)$ و $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\right)$

تمرين 8 :

أعط الشكل الجبري لكل من العددين العقديين : $(1-i)^{2004}$ و $(1+i)^{2004}$

تمرين 9 :

A , B , C نقط ألحاقها على التوالي هي : $a=2+2i\sqrt{3}$ و $b=2-2i\sqrt{3}$ و $c=-1+i\sqrt{3}$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية من C

تمرين 10 :

نعتبر التطبيق f المعرف ب : $f(z)=\dfrac{(3+4i)\bar{z}+4-8i}{5}$ نضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

a) حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي $f(z)$ بدلالة x و y

b) استنتج مجموعة النقط D بحيث : $D=\{\eta(z)\in P / f(z)=z\}$

تمرين 11 :

نعتبر التطبيق f المعرف ب :

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto Z=iz^2-(1+i)z+1$$

نضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

a) حدد مجموعة النقط **M** ذات ألحق z حيث $Z\in\mathbb{R}$

b) مثل هذه المجموعة من المستوى المنسوب إلى م م م

تمرين 12 :

نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين $z_A=i$ و $z_B=-1-2i$ على التوالي

a) حدد (E) مجموعة النقط **M** ذات اللحق z حيث $|z-i|=\sqrt{10}$

b) تحقق أن $B\in(E)$

c) أنشئ المجموعة (E) من المستوى العقدي المنسوب إلى م م م . وحدد تقاطع (E) مع محور الأفاصيل

تمرين 13 :

حدد مجموعة النقط $M(z)$ من الحالات التالية :

1) $|z-i|=|z|$, 3) $(z^2-2i\bar{z}+1+i)\in\mathbb{R}$

2) $|z-i|=2|z|$, 4) العدد $(z^2+3\bar{z}-3+i)$ تخيلي صرف

تمرين 14 :

نعتبر النقط A و B و C ذات اللحق $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=iz_A$ و $z_C=iz_B$

بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية

تمرين 15 :

a) أكتب العدد العقدي $z_1=1+i\sqrt{3}$ على الشكل ألمثلثي

b) أكتب على الشكل ألمثلثي و الشكل البري الأعداد العقدية z_2 و z_3 حيث : $z_2=iz_1$ و $z_3=iz_2$

c) لتكن النقط M_1 و M_2 و M_3 صور الأعداد العقدية z_1 و z_2 و z_3 على التوالي

بين أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الساقين وقائم الزاوية .

تمرين 16 :

لتكن $z=x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$

نعتبر النقطة M' التي لحقها z' حيث $z'=f(z)$ و $f(z)=\dfrac{z+\bar{z}+i}{z-i\bar{z}}$

a) أحسب معيار و عمدة $f(i)$

b) أستنتج أن العدد $\left(f(i)\right)^{8n}$ عدد حقيقي وموجب حيث $n\in\mathbb{N}$

تمرين -7-

لكل z من $\mathbb{C}^*$ نضع $f(z)=\frac{1+i\sqrt{3}}{z}$

1) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(i)$ و $f(1-i\sqrt{3})$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=z$.

3) حدد وأنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$:

أ- (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $|f(z)|=1$

ب-(Δ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون : $\arg(f(z))\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

تمرين 9

1- لتكن الأعداد العقدية $z_2;z_1;z_0$ بحيث : $z_0=\left[\frac{2}{3},\frac{\pi}{5}\right]$; $z_1=\left[\frac{3}{2},\frac{19\pi}{30}\right]$; $z_2=\left[\frac{2}{3},\frac{23\pi}{15}\right]$ g^{-1}

نضع : $u_1=z_0z_1$ و $u_2=\frac{z_2}{z_0}$

أ- بين أن : $u_1=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $u_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب- أحسب : $u_1^6+u_2^6$

2- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، نعتبر في (P) النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$: و u_1 و u_2.أحسب المسافة BC وحدد قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

تمرين 23

في $\mathbb{C}$ نعتبر الحدودية P المعرفة بما يلي : $\mathrm{P}(z)=z^4+iz^3+2z^2+iz+1$; $z\in\mathbb{C}$

1- بين أنه إذا كانت z_0 حلا للمعادلة : $(E):\mathrm{P}(z)=0$ فإن العدد $\frac{1}{z_0}$ هو أيضا حلا للمعادلة (E)

2- أحسب $\mathrm{P}(i)$ ثم استنتج حلول المعادلة(E).

3- أكتب الحلول على الشكل المثلثي.

تمرين 24

نعتبر الحدودية : $\mathrm{P}(z)=2z^3-(1+i\sqrt{3})z^2-2z+1+i\sqrt{3}$, $z\in\mathbb{C}$

1- أحسب $\mathrm{P}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

ثم استنتج حل المعادلة : $\mathrm{P}(z)=0$, $z\in\mathbb{C}$

2- لتكن A و B و C النقط التي الحاقها على التوالي $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_B=-1$ و $z_C=1$.

a- أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

b- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

تمرين 22 :

1- حل من $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$; $z\in\mathbb{C}$

2- نضع $P(z)=z^3-(1+i)z^2+2iz+2(1-i)$; $z\in\mathbb{C}$

a) أحسب $P(-1+i)$

b) أستنتج حل المعادلة : $P(z)=0 \quad , \quad z\in\mathbb{C}$

c) أكتب الحلول على الشكل ألمثلثي

تمرين 24:

نعتبر من $\mathbb{C}$ المعادلة (E). $(E):\quad z^2-2z+1+tg^2\alpha \quad / -\frac{\pi}{2}\prec\alpha\prec\frac{\pi}{2}$

-1 حل من $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . أعط الحلين z_1 و z_2 على الشكل ألمثلثي

-2 نفترض أن $\alpha=\frac{\pi}{4}$

a) لتكن n من $\mathbb{N}$. أحسب $z_1^n+z_2^n$ بدلالة n

b) حدد n من أجل أن يكون : $z_1^n+z_2^n=0$

-3 a) حل من $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^4+z^2\sqrt{2}+1=0$ (ضع $Z^2\sqrt{2}=z$). أعط الحلول على الشكل ألمثلثي

b) أستنتج قيمة : $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

تمرين 26 :

المعادلة : **-1** حل من $z^3-1=0 \ , \ z\in\mathbb{C}$

-2 بين أن $z_0=3-2i$ حل للمعادلة $z^3+46i+9=0 \quad (E)$

-3 استنتج من $\mathbb{C}$ الحلول الأخرى للمعادلة (E)

من المستوى العقدي P المنسوب إلى معلم م م $(o,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتان A_1 و A_2 لحقيهما على التوالي $z_1=2+i$ و $z_2=-2+4i$

-1 أحسب $\frac{z_2}{z_1}$ و استنتج عمدة $\frac{z_2}{z_1}$ ما هي طبيعة المثلث A_1OA_2

-2 لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي P لحقها $z=x+iy$ حيث $y\in\mathbb{R}$ و $x\in\mathbb{R}$

نفترض أن $z\neq z_2$ و نعتبر العدد العقدي Z حيث $Z=\frac{z-z_1}{z-z_2}$

حدد ومثل مبيانيا E مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|Z|=1$

-3 لتكن $M'(z')$ نقطة من P لحقها $z'=x'+iy'$ و ليكن Z' عددا عقديا حيث : $Z'=\frac{z'-z_2}{z_1}$

حدد و مثل مبيانيا F مجموعة النقط $M'(z')$ حيث Z' يكون تخيلي صرفا

تمرين 32 :

نعتبر الحدودية: $P(z)=z^3+z^2+z+1 \ , z\in\mathbb{C}$. لتكن المعادلة (E) : $z\in\mathbb{C}, P(z)=0$

-1 بين أنه إذا كانت z_0 حلا للمعادلة (E) فإن العدد $\overline{z}_0$ هو أيضا حل للمعادلة (E)

-2 أ) أحسب $P(-i)$ و $P(i)$ و أستنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

ب) أكتب كل حل على الشكل ألمثلثي

تمرين 34 :

نعتبر من $\mathbb{C}$ المعادلة (E). $(E)\ :\ z^6-9iz^3+18-26i$

-1 بين أن $2+i$ و $1-i$ حلان للمعادلة (E)

-2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E'):\ z^3-1=0$

3- أ) بين أنه إذا كان z_0 حلا للمعادلة (E) و Z_0 حلا للمعادلة (E') فإن $z_0 Z_0$ حل للمعادلة (E)

ب) استنتج حلول المعادلة (E) (نقبل إن المعادلة (E) تقبل بالضبط 6 حلول)

نعتبر الحدودية P المعرفة بما يلي : $z \in \mathbb{C}; P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

1- بين أن المعادلة $P(z)=0$, $z \in \mathbb{C}$: (E) تقبل حلا تخيلا صرفا و حدده

2- تحقق أن : $\forall z \in \mathbb{C} \;:\; P(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

3- حل من $\mathbb{C}$ المعادلة (E) وأكتب الحلول على الشكل ألمثلثي

4- من المستوى العقدي المنسوب إلى $(o,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط M_1 و M_2 و M_3 التي ألحاقها على التوالي : معلم متعامد ممنظم

z_1 و z_2 و z_3 حيث : $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = \sqrt{3} + i$ و $z_3 = 2i$

a) بين أن النقط M_1 و M_2 و M_3 تنتمي إلى دائرة مركزها o

b) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_2 - z_3|$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $oM_1M_2M_3$

تمرين 40 :

ليكن θ عددا حقيقيا حيث $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$. أكتب الأعداد التالية على الشكل ألمثلثي

1- $z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$

2- $z_2 = -\cos\theta + i\sin\theta$

3- $z_3 = -\cos\theta - i\sin\theta$

4- $z_4 = \sin\theta + i\cos\theta$

5- $z_5 = -\sin\theta + i\cos\theta$

6- $z_6 = \sin\theta - i\cos\theta$

7- $z_7 = \sin\theta - i\cos\theta$

8- $z_8 = (1+\cos\theta) + i\sin\theta$

9- $z_9 = (1-\cos\theta) + i\sin\theta$

10- $z_{10} = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$

11- $z_{11} = \sin\theta + i(1-\cos\theta)$

تمرين 42 :

نعتبر المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب : $\begin{cases} z_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = (1+i)z_n \end{cases}$

1- أحسب z_2 و z_3 و z_4 و z_5 وأرسم صورها من المستوى العقدي

2- أحسب z_n بدلالة n و $(1+i)$ و استنتج أن المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية محددا عناصرها الأساسية

3- ماهي مجموعة الأعداد p بحيث z_p بحيث يكون عددا حقيقيا

تمرين 43 :

θ عدد حقيقي حيث $0 \prec \theta \prec 2\pi$. نعتبر العددين العقديين $z = \cos\theta + i\sin\theta$ و $Z = \frac{1+z}{1-z}$ حيث $z \neq 1$

1- a) ماهي قيم θ التي من أجلها Z معرفة

b) بين أن : $Z = i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

c) ماهي قيم θ التي من أجلها يمكن حساب عمدة Z ، $\arg Z$ وما هو العمدة من هذه الحالة

2- أحسب معيار Z بدلالة θ