052

(الأسئلة مستقلة فيما بينها).

1) أكتب العدد $A=\ln(3\sqrt{3})+\ln(81)+\ln(12\sqrt[3]{3})$ بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$.

2) بيّن أنّ النّقطة $A(-\frac{1}{2},0)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة $f(x)=\ln(\frac{x}{x+1})$.

3) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_1:\ \ln(5-x)+\ln(1-x)\ >\ 2\ln(x+1)$.

4) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_2:\ \ln(3x+2)\ <0$.

5) حدّد مجموعة تعريف: $a(x)=\frac{x}{\ln x}$ و $b(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$ و $\ell(x)=\sqrt{2-(\ln x)^2}$

6) حدّد دالة أصلية ل: $c(x)=\frac{1}{x\ln x}$ و $d(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$.

7) أحسب $B=\log_2(\frac{1}{5})+\log_2(10)+\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3})$.

بالتوفيق

8) أحسب $C=\log(250000)+\log(\sqrt{250})-\log(125)$.

9) أحسب $D=\log(2+\sqrt{3})+\log(2-\sqrt{3})-\log(4)+\log(2)\log(100)$.

10) حلّ المعادلة: $E_1:\ \log_3(2x-1)+\log_3(x)=1$.

11) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $I_3:\ (\ln x)^2+5(\ln x)-6\le 0$.

12) لتكن: $U_{n+1}=\sqrt{\frac{U_n}{e}}$ و $U_1=e^2$ و $V_n=\frac{1+\ln(U_n)}{2}$ ، $n\ge 1$.
بيّن أنّ $(V_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأول.

13) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_2:\ (0,5)\ln(x-1)+\ln(\sqrt{x+2})=\ln 2$.

14) حدّد دالة أصلية ل: $e(x)=\frac{4x+3}{2x^2+3x-1}$ ، $g(x)=\tan x$ ، $h(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

15) تقدّر ساكنة مدينة هذه السنة ب 81000 نسمة، نسبة تزايدها سنوياً هي % 2,6 .
كم من السنوات يلزم هذه الساكنة حتى تصبح 162000 نسمة ؟

16) لتكن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها 0,2 و حدّها الأوّل $v_0=25$.
تحقّق أنّ المتتالية: $u_n=\log_5(v_n)$ ، حسابية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل.

17) أحسب النهايات: $A=\lim\limits_{+\infty}\frac{(\ln x)^7}{x^4}$; $B=\lim\limits_{+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^8}$; $C=\lim\limits_{0+}x(\ln x)^4$

$D=\lim\limits_{+\infty}\frac{x-3\ln x}{2x-\ln x}$; $E=\lim\limits_{-\infty}(x+\ln(x^2+1))$; $F=\lim\limits_{(-1)+}\ln(\frac{3-x}{x+1})$

$G=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})$; $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{\sqrt[5]{x}}$; $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x-x^2)}{x}$

053

$f(x)=x(\ln x)^2-4x\ln x+\frac{19}{4}x\ ;\ x>0$ و $f(0)=0$

1) أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و تحقّق أنّ $f(\sqrt{e})=3\sqrt{e}$ و $f(e^{\frac{3}{2}})=e^{\frac{3}{2}}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}x(\ln x)^2$ ثمّ بيّن أنّ f متّصلة على $\mathbb{R}$. **(فرض محروس 08 / 09)**

3) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

4) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي ل (C_f) بجوار $+\infty$.

5) بيّن أنّ: $f'(x)=0,25(2\ln x-1)\cdot(2\ln x-3)$ و ضع جدول التغيّرات.

6) أنشئ (C_f) . نأخذ: $\sqrt{e}\approx 1,7$ و $e^{\frac{3}{2}}\approx 4,5$ و $3\sqrt{e}\approx 5$.

7) g قصور f على $I=[e^{-0,5},e]$ ، بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يتمّ تحديده و أنشئ منحنى الدالة g^{-1} ثمّ أحسب $(g^{-1})'(\frac{7e}{4})$.

054

I) 1) نعتبر $g(x)=x-2\ln x$ ، $x\in]0,+\infty[$: أحسب $g'(x)$.

2) أ) بيّن أنّ g تناقصية على $]0,2]$ و تزايدية على $[2,+\infty[$

ب) استنتج أنّ $\forall x>0:\ g(x)>0$ لاحظ أنّ $g(2)>0$.

II) نعتبر الدالة $f(x)=x-(\ln x)^2$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ و أوّل النتيجة هندسياً. **(بكالوريا وطنية 2007 / 2008 د ع)**

2) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ و استنتج $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

ب) بيّن أنّ C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه $\Delta:y=x$ و بيّن أنّ C_f يوجد تحت (Δ)

3) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثم ضع جدول التغيرات و حدّد معادلة المماس في 1.

4) بيّن أنّ $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $\mathbb{R}^{+*}$ و $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$ نأخذ: $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$

5) أنشئ C_f و (Δ) ، نقبل أنّ $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف

055

(بكالوريا وطنية 2004 / 2005 د ع)

__الجزء الأوّل:__ $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$ حيث $x>0$.

1) أ) أحسب $g'(x)$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$ ثمّ أدرس منحى تغيّرات g .

ب) استنتج أنّ $g(x)\ge 0$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$.

2) أ) بيّن أنّ: $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ: $(x-1)\ln x\ge 0$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$.

3) استنتج أنّ: $h(x)>0$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$.

__الجزء الثّاني:__ نعتبر الدالة $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$ حيث $x\in]0\ ;+\infty[$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ ثمّ أوّل النّتيجة مبيانياً ثمّ أحسب $\lim\limits_{+\infty}f(x)$

ب) حدّد الفرع اللانهائي ل C_f جوار $+\infty$. لاحظ $f(x)=1+x\ln x(1-\frac{\ln x}{x})$

2) بيّن أنّ: $\forall x>0:f'(x)=\frac{h(x)}{x}$ و استنتج أنّ f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^{+*}$.

3) أ) بيّن أنّ $y=x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المماسّ ل C_f في $A(1\ ;1)$

ب) تحقّق من أنّ $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ لكلّ x من المجال $]0\ ;+\infty[$.

ج) أدرس إشارة $f(x)-x$ ثمّ استنتج الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم (Δ) .

4) أنشئ C_f و (Δ) (نقبل أنّ ل C_f نقطة انعطاف أفصولها بين 1 و 1,5).

__الجزء الثّالث:__ المتتالية (u_n) بحيث: $u_0=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكلّ n من $\mathbb{N}$

1) بيّن بالترجّع أنّ: $1<u_n<e$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تناقصية. يمكنك استعمال السّؤال 3) ج) من الجزء الثّاني

3) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ أحسب نهايتها.

056

$f(x)=\ln(\frac{x}{2-x})$: $x\in]0\ ;2[$. **(بكالوريا وطنية 2004 / 2005 د س)**

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$.

ب) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}$ لكلّ x من $]0\ ;2[$ و أعط جدول تغيّرات f .

2) بيّن أنّ $A(1\ ,\ 0)$ مركز تماثل ل C_f و أكتب معادلة (T) المماس ل C_f في A

3) نضع $\varphi(x)=f(x)-x$. (نأخذ $\ln 3\approx 1,1$ و $\ln 7\approx 1,94$).
بيّن أنّ المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاًّ α : $1,5<\alpha<1,75$ و أوّل النّتيجة.

4) بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية و أنشئ في نفس المعلم (C_f) و منحنى f^{-1} .

057

بكالوريا وطنية 2005 / 2006 د ع

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0\,,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1) أ) أحسب $g^{/}(x)$ ثمّ بيّن أنّ g تناقصية قطعاً على $]0\,,+\infty[$.

ب) استنتج أنّ: $g(x)\leq 0$ لكلّ x من $]0\,,+\infty[$.

2) بيّن أنّ: $0<\ln(1+x)<x$ لكلّ x من $]0\,,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة: $f(x)=x+\ln(\dfrac{x+1}{x-1})$.

1) بيّن أنّ حيّز تعريف f هو $D=]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[$ و أنّ f دالة فردية.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$.

3) بيّن أنّ: $\forall x\in D:\ f^{/}(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ و استنتج تغيّرات f على $]1\,,+\infty[$.

4) أ) تحقّق أنّ المستقيم $(\Delta):y=x$ مقارب مائل ل C_f .

ب) أدرس إشارة $\ln(\dfrac{x+1}{x-1})$ (يمكن ملاحظة أنّ $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ $\forall x\in D$)

ج) استنتج الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم (Δ) .

5) أنشئ C_f الوحدة $1cm$ نأخذ: $\sqrt{3}\approx1{,}7$ و $f(\sqrt{3})\approx3$.

III) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ بحيث: $u_n=f(n)-n$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

1) تحقّق أنّ $u_n=\ln(1+\dfrac{2}{n-1})$ لكلّ n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ ثمّ بيّن أنّ $(u_n)_n$ تناقصية.

2) بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}:0<u_n<\dfrac{2}{n-1}$ (استعمل I) 2)) ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

058

$f(x)=\ln(x^2-2x+2)$. **(بكالوريا وطنية 2003 / 2004 د س)**

1) حدّد $D_f=\mathbb{R}$ ثم أحسب: $\lim\limits_{+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty}f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم $x=1$ محور تماثل C_f

3) أ) تحقّق أنّ: $f(x)=2\ln(x)+\ln(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2})$ لكلّ x من $]1,+\infty[$.

ب) استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x)=0$ ثمّ أوّل النّتيجة هندسياً.

4) بيّن أنّ: $f^{/}(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$ و أعط جدول التغيّرات.

5) بيّن أنّ: $f^{//}(x)=\dfrac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$ و أدرس تقعّر C_f ثمّ أنشئ C_f .

6) ليكن h قصور f على $]1,+\infty[$، بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية و حدّد $h^{-1}(x)$.

059

(بكالوريا 1993/1994)

A) لتكن g المعرّفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\dfrac{-2}{x+2}+\ln(\dfrac{x+2}{x})$

بيّن أنّ: $g^{/}(x)=-4\cdot[x(x+2)^2]^{-1}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

B) لتكن f المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ ب: $f(x)=x\cdot\ln(\dfrac{x+2}{x})$ و $f(0)=0$

1) بيّن أنّ f متصلة في 0^+ و أدرس قابلية اشتقاقها في 0^+ ثم أعط تأويلاً هندسياً.

2) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ (ضع $X=2/x$).

3) بيّن أنّ: $\forall x>0:f^{/}(x)=g(x)$ و ضع جدول تغيرات f .

4) حدّد تقعّر C_f ثمّ أنشئ المنحنى C_f في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$، الوحدة $2cm$.

060

$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^3) & x<0\\ 4x\sqrt{x}-3x^2 & x\geq0\end{cases}$. **(بكالوريا وطنية 2002 / 2003 د ع)**

1) بيّن أنّ f متصلة و قابلة للاشتقاق في 0 (نذكّر أنّ: $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$).

2) بيّن أنّ f تناقصية على $]-\infty,0[$ و $]1,+\infty[$ و تزايدية على المجال $[0,1]$.

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) تحقّق أنّ: $\forall x<0:\ \dfrac{f(x)}{x}=3\dfrac{\ln(-x)}{x}+\dfrac{\ln(1-x^{-3})}{x}$. **بالتوفيق**

ج) أدرس الفرعين اللانهائيين و أنشئ المنحنى (C_f) .

4) لتكن h قصور f على $]-\infty,0[$. بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد صيغة $h^{-1}(x)$ ، $x\in J$.

5) أ) $u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^{\ 2}$ و $u_0=\dfrac{4}{9}$. بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}:\ \dfrac{4}{9}\ \leq\ u_n\ \leq\ 1$

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تزايدية و استنتج أنّها متقاربة ثم أحسب نهايتها.

061

(بكالوريا وطنية 2006 2007 د س)

I) لتكن $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$ حيث $x\in]0\,,+\infty[$.

1) بيّن أنّ $g^{/}(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ ثمّ استنتج منحى تغيّرات g على $]0\,,+\infty[$.

2) بيّن أنّ $\forall x\in]0,1]:\ g(x)\leq0$ و أنّ $\forall x\in[1,+\infty[:\ g(x)\geq0$ $g(1)=0$

II) نعتبر الدالة $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ حيث $x\in]0\,,+\infty[$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) تحقّق أنّ $f(1/x)=f(x)$ لكلّ x من $]0\,,+\infty[$.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ (يمكن وضع $t=1/x$) ثمّ أوّل النتيجة مبيانياً.

د) بيّن أنّ C_f يقبل فرعا شلجمياً اتجاهه المقارب هو المستقيم $y=x$.

2) بيّن أنّ $\forall x>0:\ f^{/}(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ و ضع جدول تغيّرات f ثمّ أنشئ C_f .

3) بيّن أنّ الدالة $G(x)=x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $]0\,,+\infty[$.

062

(بكالوريا وطنية 2002 / 2003 د س)

الجزء الأول: لتكن الدالة: $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$: $x\in\mathbb{R}^+$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و أدرس قابلية اشتقاق f في 0^+ .

2) بيّن أنّ f تناقصية على $[0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$.

الجزء الثّاني: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=2$.

1) بيّن بالترجّع أنّ: $1\leq u_n\leq2$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) تناقصية و استنتج أنّها متقاربة ثم أحسب نهايتها.

الجزء الثّالث: لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب: $g(x)=\ln(x-2\sqrt{x}+2)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g) .

2) أدرس تغيرات g ، (نقبل أنّ $\lim\limits_{x\to0+}(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-\infty$) و أنشئ (C_g) .

3) لتكن h قصور g على $[1,+\infty[$. بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد صيغة $h^{-1}(x)$ $x\in J,$