

تمرين 1:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases} \text{ لتكن } (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :}$$

- 1- أحسب u_2 و u_1
- 2- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية . ثم أستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$
- 3- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq u_n$. ثم أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 2u_n$
- و استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2^n$
- 4- استنتج نهاية (u_n)

تمرين 2 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- 1- برهن أن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 3$
- 2- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = 3 - u_n$
 - (a) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < v_{n+1} < \frac{1}{3}v_n$
 - (b) أستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < v_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 - (c) ما هي نهاية (v_n)
 - (d) ما هي نهاية (u_n)

تمرين 3 :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية العددية الموجبة } (u_n)_{n>0} \text{ والمعرفة بما يلي :}$$

- 1- أحسب u_3 و u_2
- 2- لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}^*; v_n = u_n + \frac{1}{n}$
 - (a) بين أن $(v_n)_{n>0}$ متتالية هندسية وحدد عناصرها
 - (b) أحسب v_n و u_n بدلالة n

تمرين 4 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = (1+u_n)\sqrt{u_n} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية العددية الموجبة } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- 1- أحسب u_2 و u_1
- 2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 1$
- 3- تحقق أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \geq 1+u_n$ و استنتج أن (u_n) تزايدية
- 4- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq n$ و استنتج نهاية (u_n)

تمرين 5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = 2 - \frac{3}{2+u_n} \end{array} \right.$$

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

- 1- أحسب u_1 و u_2
- 2- بين أن لكل n من \mathbb{N} : $0 \leq u_n \leq 1$
- 3- بين أن (u_n) تزايدية
- 4- أ) بين أن (u_n) متقاربة
ب) حدد نهاية (u_n)

تمرين 6 :

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$ و $u_0 = \frac{3}{2}$

نضع $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ لكل n من \mathbb{N}

- 1- بين أن (v_n) متتالية هندسية
- 2- أحسب v_n بدلالة n

3- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{2+2^n}{1+2^n}$

4- أحسب $\lim u_n$

5- نضع لكل n من \mathbb{N} : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

a) أحسب S_n بدلالة n

b) أحسب $\lim S_n$

تمرين 7 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = 1 + \sqrt{1+u_n^2}$ و $u_0 = 0$

1- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 1$

2- بين أن (u_n) تزايدية

3- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq n$

4- أستنتج نهاية (u_n)

تمرين 8 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = (-2)^n + 3n + 1$

أحسب بدلالة n المجموع $S = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right) \end{array} \right.$$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

1- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{3} < u_n$

2- لكل n من $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ نضع : $v_n = \sqrt{3} - u_n$

بين : لكل n من \mathbb{N} : $0 < v_n < v_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n$. و استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$

تمرين 10 :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{(-2)^n - 3 \cos n}{4^n}$$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب :

(a) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n| \leq \frac{3+2^n}{4^n}$

(b) استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$

تمرين 11 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

نعتبر المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

(a) بين أن : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} ; \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$

(b) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{n}{n^2+n} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1}$

(c) حدد نهاية $(x_n)_{n \geq 1}$

تمرين 12 :

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{1 + 2^n}$$

لكل n من \mathbb{N}

بين أن لكل n من $\mathbb{N}^* : u_n < -\frac{1}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^n$. و استنتج نهاية (u_n) .

تمرين 13 :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 2} \end{array} \right.$$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة ب :

- (a) أحسب u_1 و u_2 و u_3
- (b) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ مكبورة ب $\sqrt{3}$
- (c) استنتج أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية محدودة

تمرين 14 :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{-2n+5}{n+1}$$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب :

تمرين 15:

$$n \in \mathbb{N}^* , \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot v_{n-1}} \end{cases} : \text{ نعتبر المتتاليتين } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ بحيث :}$$

- 1- أحسب u_1 و v_1 ثم u_2 و v_2
2- بين أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تناقصية قطعا و أن $(v_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعا .
و أن : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$

تمرين 16:

حدد a و b لكي تكون $2a + b$ و $2a$ و $b + 1$ في هذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية العددين

تمرين 17:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases} : \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة ب :}$$

- (a) بين أن : $u_n \neq 1$; $S = \forall n \in \mathbb{N}$
(b) لكل n من \mathbb{N} نضع : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول
(c) أحسب (u_n) بدلالة (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

تمرين 18:

حدد نهاية المتتاليات : $(u_n)_{n \geq 0}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 0}$ و $(x_n)_{n \geq 1}$ بحيث :

$$(x_n) = \frac{2 \cdot n^{\frac{3}{2}} + 2^n}{n^2 + 4^n} ; (w_n) = \frac{-2}{(1 - 10^{-7})^n} ; (v_n) = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} ; (u_n) = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$$

تمرين 19:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}, n \geq 0 \end{cases} : \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة ب :}$$

- 1- (a) أثبت أنه لكل n من \mathbb{N} : $2 < u_n < 3$
(b) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$
2- (a) تحقق أن لكل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

(b) أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2 < \left(\frac{9}{10}\right)^n$

3- (a) هل (u_n) متقاربة

(b) أحسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين 20 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

1- (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n-1} > 0$ ثم أدرس رتبة (u_n)
(ب) أستنتج أن (u_n) متقاربة

2- (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n + 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. حدد نهاية (u_n)

تمرين 21 :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6u_n + 4}{u_n + 6} \end{cases}$$

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

1- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$

2- أدرس رتبة المتتالية (u_n)

3- نضع لكل n من \mathbb{N} : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

(a) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(b) أحسب v_n و u_n بدلالة n

(c) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 22 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{4 - u_n^2}{3 - u_n^2}} \end{cases}$$

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب :

1- (a) بين أنه لكل n من \mathbb{N} : $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$

(b) بين أن (u_n) تزايدية

2- نضع لكل n من \mathbb{N} : $v_n = \frac{2}{2-u_n^2}$

- (a) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددًا أساسها وحدها الأول
(b) أحسب v_n و u_n بدلالة n
(c) أحسب نهاية (u_n)

تمرين 23 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ \forall n \geq 3; u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2} \end{cases}$$

1- أحسب u_3 و u_4

2- نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة ب :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_n = u_n - u_{n-1}; n \geq 2 \end{cases}$$

- (a) أحسب v_1, v_2
(b) أحسب v_n بدلالة u_{n-1} و u_{n-2} من أجل $2 \leq n$. ما ذا يمكنك استنتاجه
(c) بين أن $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
(d) استنتج أن (u_n)

تمرين 24 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[-1, +\infty[$ ب :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1- أدرس تغيرات f

2- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) بين أن لكل n من \mathbb{N} : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$
(b) ما ذا يمكنك استنتاجه
(c) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|$
(d) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$. ثم استنتج نهاية (u_n)
(e) هل يمكنك حساب نهاية (u_n) بطريقة أخرى؟ ماهي؟

تمرين 25 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6 + u_n^3 \end{cases} \quad \text{المعرفة ب : } (u_n) \text{ المتتالية}$$

1- بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

2- (أ) تحقق أن $u_n^3 - u_n + 6 = (2 + u_n)(u_n^2 - 2u_n + 3)$

(ب) استنتج رتبة المتتالية (u_n)

تمرين 27 :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n^2} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ بحيث :}$$

1- (أ) بين أن $0 < u_n$ لكل n من \mathbb{N}

(ب) بين أن (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة

2- (أ) بين أن $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$ لكل n من \mathbb{N}

(ب) أحسب نهاية (u_n)

تمرين 28 :

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 15u_{n-1}) \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب : } (u_n)$$

1- أحسب u_2 و u_3

2- لتكن $(v_n)_{n>0}$ المتتالية المعرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{3}(2u_n + 5u_{n-1})$

بين أن $(v_n)_{n>0}$ متتالية هندسية و أعط حدها الأول و أساسها

3- نعتبر المتتالية العددية $(w_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 3u_{n-1} - u_n$

بين أن $(w_n)_{n>0}$ متتالية هندسية أعط عناصرها الأساسية .

4- أحسب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5- هل المتتالية (u_n) متقاربة

تمرين 29 :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة ب :}$$

1- حدد قيمة a إذا علمت أن (u_n) متتالية ثابتة

2- فيما يلي نفترض أن $a = 0$ أي $u_0 = 0$

- (a) بين أن لكل n من \mathbb{N} : $0 \leq u_n$
(b) بين أن لكل n من \mathbb{N} : $u_n \leq \sqrt{3}$
(c) بين (u_n) متتالية تزايدية
(d) ماذا يمكنك استنتاجه
3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_n(v_n)$
(a) بين أن (v_n) هندسية أساسها $k = (2 - \sqrt{3})^2$ ثم حدد v_n بدلالة n
(b) حدد u_n بدلالة n
(c) استنتج نهاية (u_n)

تمرين 30 :

(u_n) متتالية معرفة : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n}$ و $u_0 = 2$

نضع $v_n = \frac{1}{-1+u_n}$

- 1- بين أن (v_n) متتالية حسابية
2- عبر عن v_n و u_n بدلالة n
3- حدد نهاية (u_n)

تمرين 31

لتكن f الدالة العددية المعرفة : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 3}$
و (ℓ) المنحنى المثل للدالة f من معلم م (o, \vec{i}, \vec{j})
1- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- بين أن المستقيم ذي المعادلة : $y = 2x + \frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (ℓ)

3- بين أن $f'(x) = \frac{2x+3+2\sqrt{x^2+3x+3}}{2\sqrt{x^2+3x+3}}$ لكل x من \mathbb{R}

ثم استنتج أن f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

4- أحسب $f\left(-\frac{2}{5}\right)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ لكل x من \mathbb{R}

5- (أ) بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J يجب تحديده
(ب) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

6- مثل مبيانيا الدالتين f و f^{-1} من المعلم (o, \vec{i}, \vec{j})

7- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 1 + \sqrt{u_n^2 + 3u_n + 3} \end{cases}$$

(أ) بين أن : لكل n من \mathbb{N} : $-2 < u_n < -1$

(ب) أثبت أن (u_n) متتالية تناقصية

(ج) ماذا يمكنك استنتاجه

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2 \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+1} \end{array} \right. \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بمايلي :}$$

1- أحسب u_2 و u_3

2- نضع : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

(a) بين أن (v_n) هندسية وحدد عناصرها الأساسية

(b) أستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = (1 + 2^n) \cdot u_n$

3- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً

4- هل (u_n) متقاربة (علل جوبك)