تمرين1

ثانويــة : يوسف بن تاشفين –2004/2003

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} ; x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1+\ln^2(x)} ; x \succ 0 \end{cases}$$

(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) بين أن f متصلة في النقطة $x_0 = 0$.

2) ادرس قابلية اشتقاق f في النقطة $x_0 = 0$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

3) أ- تحقق من أنه : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \; ; \; f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

ب- احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

4) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ ولخص ذلك في جدول.

5) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

6) نقبل أن (C_f) يقبل 3 نقط انعطاف هي النقط ذات الأفاصيل : $e^{(1-\sqrt{2})}$ و $e^{(1+\sqrt{2})}$ و e.

أنشئ (C_f) ومقاربه ومماسه في النقطة ذات الأفصول e.

نعطي : $e^{(1-\sqrt{2})} \simeq 0,7$ و $e^{(1+\sqrt{2})} \simeq 11,2$ و $f\left(e^{(1-\sqrt{2})}\right) \simeq 0,6$ و $f\left(e^{(1+\sqrt{2})}\right) \simeq 1,7$

تمرين2

الثانوية : الحسن الثاني التأهيلية2005/2006

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = L\text{n}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$

1. بين أن : $D_g =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

2. أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

3. بين أن : $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$

4. أعط جدول تغيرات الدالة g واستنتج أن : $g(x) \succ 0 \; : \; (\forall x \in D_g)$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = xL\text{n}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \quad ; \quad x \ne 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. بين أن : $D_f =]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[$

2. أحسب : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$ (ضع $X = \dfrac{1}{x}$)

3. أدرس اتصال f على يمين 0 .

4. أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 ثم أعط تأويلا هندسيا.

5. أدرس تغيرات f .

6. أرسم (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III. نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $v_n = Ln(u_n)$ و $w_n = \frac{v_n}{n}$.

1. تحقق أن : $v_n = f(n)$ وأن (v_n) متتالية تزايدية قطعا و $0 \prec v_n \prec 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. أحسب : $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$ بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين-3-

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \ln(1+x^2) & \text{إذا كانـت } x \succ 0 \\ f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{إذا كانـت } x \le 0 \end{cases}$$

وليكن (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب غلى معلم ممنظم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حدد حيز تعريف f وأدرس نهايات f عند محدات هذا الحيز.

ب- أدرس اتصال f وقابلية إشتقاقها عند النقطة $x_0 = 0$

نقبل أن : $(\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1)$

ج- أدرس الفروع اللانـهائية للمنحنى (ℓ)

(يمكن استعمال : (من أجل $x \succ 0$; $(\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$))

2) أ- أدرس تغيرات الدالة f

ب- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2x \ge 0$

واستنتج من ذلك وضع المنحنى (ℓ) بالنسبة للمستقيم (T) الذي معادلته هي : $y = 2x$

ج- حدد نقطة انعطاف (ℓ) ذات الأفصول الموجب.

(نقبل أن للمنحنى (ℓ) نقطة انعطاف ذات أفصول سالب وهي $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.)

د- أرسم المستقيم (T) والمنحنى (ℓ).

(المطلوب العناية برسم (ℓ) جوار كل من النقط **1- , 0 , 1**)

تمرين-4-

نعتبر الدالتين العدديتين h و f للمتغير الحقيقي x المعرفتين ب :

$$h(x) = (\ln x)^3 + (\ln x) - 2$$

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

1) أ- بين أن الدالة h تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

ب- أحسب $h(e)$

واستنتج إشارة $h(x)$

2) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

ب- أدرس نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها.

ج- بين أن : $\forall x \in D_f \;\; ; \;\; f'(x) = \frac{h(x)}{x(\ln x)^3}$

د- استنتج مما سبق جدول تغيرات الدالة f

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left]\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$

4) نعتبر المنحيين (ℓ) و (Γ) الذين على التوالي معادلتاهما هما : $y=f(x)$ و $y=\ln x$

أ- أدرس الأوضاع النسبية ل (ℓ) و (Γ)

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$

ج- أرسم المنحيين (ℓ) و (Γ) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين-5-

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ ب :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}, x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) بين أن f متصلة في 0 على اليمين

4) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليمين

5) أ- أحسب $f'(x)$

ب- اعط جدول تغيرات f

6) اعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى في النقطة $A(e,0)$

7) أنشئ (ℓ)

تمرين-6-

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$

1) حدد D حيز تعريف f

ثم احسب نهايات f عند محدات D

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0=1$ (يمكنك وضع $\sqrt{x-1}=t$)

ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أدرس تغيرات f

4) ليكن (ℓ) منحنى f بالنسبة ل م م م م

a- أدرس الفروع اللانهائية ل (ℓ)

b- أدرس تقعر (ℓ_f)

c- أعط معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (ℓ) في النقطة ذات الأفصول $x_0=5$

d- أرسم (ℓ) و (Δ) في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين-7-

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=x\left(2+\ln^2|x|\right), x\neq 0 \end{cases}$

و (ℓ) منحنى f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\|=2cm$

1) تحقق أن f دالة فردية

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ- بين أن : $\lim_{\substack{x\to0\\0\prec x}} x\ln^2 x=0$

ثم استنتج أن f متصلة في $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 0

4) أ- أدرس تغيرات f

ب- أدرس تقعر المنحنى (ℓ)

ج- أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة هندسيا

5) مثل مبيانيا الدالة f

(أنشئ على الخصوص مماس (ℓ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{1}{e}$)