الدوال اللوغارتمية

تمرين-1-

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln(2x-1)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

3) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

4) $f(x)=\sqrt{(\ln x-1)}$

5) $f(x)=\sqrt{1-(\ln x)^2}$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}}$

تمرين-2-

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\ln x+\ln(x+1)=\ln 6$

2) $\ln(x-1)+\ln(x+3)=\ln(x^2-9)$

3) $\ln^2 x-3\ln x+2=0$

4) $\ln x+\sqrt{\ln x}-2=0$

تمرين-3-

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ من أجل $n=2$ و $n=3$ و $n=4$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\ln(x^2+1)$

تمرين-4-

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

2) $f(x)=\ln|\ln x|$

3) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

4) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

تمرين-5- أحسب النهايات :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}.\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

تمرين-6-

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\ln(x+1)-\ln(-x+5)=\ln(x+2)$

2) $(\ln x)^3-\ln x=0$

3) $\ln(3x-2)+\ln(x+1)=3\ln 2$

4) $(\ln x)^2-1=0$

http://rauba.site.voila.fr/

تمرين-7-

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\ln x \succ -1$

2) $\ln \dfrac{x+2}{x-1} \leq 0$

3) $\ln \dfrac{e}{2x} + \ln 2 \prec 1$

4) $-3 - \ln x + 2(\ln x)^2 \geq 0$

5) $\ln|x^2 - 3x + 2| \geq 0$

تمرين-8-

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

1. $\begin{cases} \ln x - \ln y = -1 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 10 \end{cases}$

تمرين-9- **حدد D_f حيز تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات عند محدات D_f في الحالات التالية :**

1) $f(x) = x - (\ln x)^2$

2) $f(x) = x \ln \dfrac{x-1}{x}$

3) $f(x) = x \ln(x^2 - x)$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم أحسب مشتقتها في كل حالة من الحالات التالية :

-1 $f(x) = x - (\ln x)^2$

-2 $f(x) = x \ln \dfrac{x-1}{x}$

-3 $f(x) = x \ln(x^2 - x)$

تمرين-10-

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{2\ln|x|}{x^2}$

1) **حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f وبين أن f زوجية**

2) **أ- أحسب** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

واعط جدول تغيرات الدالة f

3) **أ- اعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (ℓ_f) عند النقطة A ذات الأفصول 1**

ب- أنشئ المنحنى (ℓ_f)

(تحديد نقطتي الانعطاف غير مطلوب)

(نأخذ $\sqrt{e} = 1,7$ **و** $\dfrac{1}{e} = 0,4$ **)**

تمرين-11-

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

http://raqba.site.voila.fr/

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أ- بين أن لكل x من D : $f(3-x)=f(x)$

ب- بين أن المستقيم $(\Delta): x=\frac{3}{2}$ محور تماثل للمنحنى (ℓ_f)

3) أحسب نهايات f (عند محدات D)

4) أدرس تغيرات f

5) أ- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (ℓ_f)

ب- حدد تقاطع المنحنى (ℓ_f) ومحور الأفاصيل.

ج- أرسم المنحنى (ℓ_f)

تمرين-12-

أتمم دراسة الدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x)=x-(\ln x)^2$

-2 $f(x)=x\ln\frac{x-1}{x}$

-3 $f(x)=x\ln(x^2-x)$

أنظر تمرين -5- مع تمرين -9-

تمرين-13-

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x+\ln(1+x^2) & \text{إذا كانت } x\succ 0 \\ f(x)=\frac{2x}{1+x^2} & \text{إذا كانت } x\le 0 \end{cases}$$

وليكن (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب غلى معلم ممنظم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حدد حيز تعريف f وأدرس نهايات f عند محدات هذا الحيز.

ب- أدرس اتصال f وقابلية إشتقاقها عند النقطة $x_0=0$

نقبل أن : $(\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1)$

ج- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ℓ)

(يمكن استعمال : (من أجل $0\prec x$; $\ln(1+x^2)=2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$))

2) أ- أدرس تغيرات الدالة f

ب- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-2x\ge 0$

واستنتج من ذلك وضع المنحنى (ℓ) بالنسبة للمستقيم (T) الذي معادلته هي : $y=2x$

ج- حدد نقطة انعطاف (ℓ) ذات الأفصول الموجب. (نقبل أن للمنحنى (ℓ) نقطة انعطاف ذات أفصول سالب وهي $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$).

د- أرسم المستقيم (T) والمنحنى (ℓ). (المطلوب العناية برسم (ℓ) جوار كل من النقط -1 , 0 , 1)

تمرين-14-

نعتبر الدالتين العدديتين h و f للمتغير الحقيقي x المعرفتين ب :

$$h(x)=(\ln x)^3+(\ln x)-2$$

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}$$

1) أ- بين أن الدالة h تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

ب- أحسب $h(e)$

http://raqba.site.voila.fr/

واستنتج إشارة $h(x)$

2) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

ب- أدرس نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها.

ج- بين أن : $\forall x \in D_f \;\; ; \;\; f'(x) = \dfrac{h(x)}{x(\ln x)^3}$

د- استنتج مما سبق جدول تغيرات الدالة f

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $\left]\dfrac{1}{e^2}, \dfrac{1}{e}\right[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

4) نعتبر المنحنيين (ℓ) و (Γ) الذين على التوالي معادلتاهما هما : $y = f(x)$ و $y = \ln x$

أ- أدرس الأوضاع النسبية ل (ℓ) و (Γ)

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \ln x \right)$

ج- أرسم المنحنيين (ℓ) و (Γ) في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

تمرين-15-

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}, x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f في م م م $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) بين أن f متصلة في 0 على اليمين

4) أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليمين

5) أ- أحسب $f'(x)$

ب- اعط جدول تغيرات f

6) اعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى في النقطة $A(e, 0)$

7) أنشئ (ℓ)

تمرين-16-

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x) = \ln\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$

1) حدد D حيز تعريف f

ثم احسب نهايات f عند محدات D

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0 = 1$ (يمكنك وضع $\sqrt{x-1} = t$)

ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أدرس تغيرات f

4) ليكن (ℓ) منحنى f بالنسبة ل م م م م

a- أدرس الفروع اللانهائية ل (ℓ)

b- أدرس تقعر (ℓ_f)

c- أعط معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (ℓ) في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 5$

d- أرسم (ℓ) و (Δ) في المستوى المنسوب إلى م م م $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

تمرين-17-

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\left(2 + \ln^2 |x|\right), x \neq 0 \end{cases}$$

http://raqba.site.voila.fr/

و (ℓ) منحنى f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) تحقق أن f دالة فردية

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ- بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ 0\prec x}} x\ln^2 x = 0$

ثم استنتج أن f متصلة في $x_0 = 0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 0

4) أ- أدرس تغيرات f

ب- أدرس تقعر المنحنى (ℓ)

ج- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة هندسيا

5) مثل مبيانيا الدالة f

(أنشئ على الخصوص مماس (ℓ) في النقطة ذات الأفصول $\dfrac{1}{e}$)

تمرين-18-

أحسب النهايات :

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}.\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

تمرين-19-

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

1- $f(x) = \dfrac{x}{\ln x - 3}$

2- $f(x) = \sqrt{\ln x - 3}$

3- $f(x) = \dfrac{x+1}{x\ln x}$

4- $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x^2}$

تمرين-20-

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1. $\ln(2x-5) = 1$

2. $\ln(2x-5) = -1$

3. $k\in\mathbb{R}$ $\ln(2x-5) = k$

4. $\ln(-2x^2+5x+3) = \ln(4x^2-1)$

5. $\ln(-2x+7) - \ln(4x-9) = -\ln 3$

تمرين-21-

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

1- $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

2- $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

3- $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

4- $f(x) = \ln\sqrt{x-4}$

http://raqba.site.voila.fr/

-5 $f(x)=\sqrt[3]{x+\ln^2 x}$

-6 $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x^2}$

-7 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

-8 $f(x)=x^2\ln\dfrac{x-1}{x}$

تمرين-22-

أدرس تغيرات الدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x)=\ln^2 x$

-2 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

-3 $f(x)=\ln^2 x-\ln x$

تمرين-23-

أحسب النهاية عند $+\infty$ للدالة f في الحالات التالية :

.1 $f(x)=2x^2-4x+1-\ln x$

.2 $f(x)=-2x+5+\dfrac{1}{\ln(x+5)}$

.3 $f(x)=x^2\ln x-x^2$

.4 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{x}$

تمرين-24-

أحسب نهايات f عند محدات D_f حيز تعريف الدالة f ، لكل حالة من حالات التمرين -22-

تمرين-25-

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\dfrac{x-2}{x-1}$

1) **حدد D حيز تعريف الدالة f**
2) **أحسب النهايات عند محدات D**
3) **أدرس تغيرات الدالة f**

تمرين-26-

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

1) **حدد D حيز تعريف الدالة f**
2) **أحسب نهايات f عند محدات D**
3) **أحسب $f'(x)$ لكل x من D**
   واعط جدول تغيرات f
4) **مثل مبيانيا الدالة f**

تمرين-27-

لتكن u الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $u(x)=\ln x-x$

a- **أدرس تغيرات u واحسب $u(1)$**
   واستنتج إشارة $u(x)$

b- **نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :** $f(x)=(\ln x)^2-2x$

http://raqba.site.voila.fr/

b_1- حدد D حيز تعريف الدالة f

b_2- أحسب نهايات f عند محدات D

b_3- أحسب $f'(x)$

واستنتج تغيرات الدالة f

b_4- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (ℓ) الممثل للدالة f في م م م

b_5- أنشئ (ℓ)

http://raqba.site.voila.fr/