الدوال اللوغارتمية (1 / 2)

الثّانية بكالوريا محاسبة و تدبير1 و 2
ذ: توفيق بنعمرو

073

1) أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $3x^2-7x-6=0$.

ب) حل في $\mathbb{R}^{*+}$ المتراجحة: $3\ln^2 x-7\ln x-6>0$.

2) حلّ في $(\mathbb{R}^{+*})^2$ النّظمة: $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x+\ln y=\ln 10 \end{cases}$ (بكالوريا وطنية 2003)

074

(الأسئلة مستقلة فيما بينها).

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_1:\ (0,5)\ln(x-1)+\ln(\sqrt{x+2})=\ln 2$.

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_2:\ 2\ln x=\ln(2-x)$

3) بيّن أنّ: $\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})+\ln(7-4\sqrt{3})=0$

4) حلّ في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $\begin{cases} 3\log_2(x)+2\log_3(y)=4 \\ \log_2(x^2)+\log_3(y^{-1})=5 \end{cases}$.

5) أحسب $\log(2+\sqrt{3})+\log(\frac{2-\sqrt{3}}{4})+\log(2)\log(100)$ لوغرتم عشري

6) تقدّر ساكنة مدينة هذه السنة ب 81000 نسمة، نسبة تزايدها سنوياً هي % 2,6 .
كم من السنوات يلزم هذه الساكنة حتى تصبح 162000 نسمة ؟

7) لتكن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها 0,2 و حدّها الأوّل $v_0=25$.
تحقّق أنّ المتتالية $(u_n)_n$: $u_n=\log_5(v_n)$ ، حسابية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل

8) لتكن الدالة: $h(x)=\dfrac{3-\ln x}{1+\ln x}$ ، حدّد D_h و أحسب $h'(x)$.

075

(بكالوريا وطنية 2007)

حدّد (u,v) بحيث $\begin{cases} \dfrac{u}{v}=4 \\ u+v=5 \end{cases}$ واستنتج (x,y) الذي يحقّق $\begin{cases} \dfrac{\ln x}{\ln y}=4 \\ \ln(xy)=5 \end{cases}$.

076

1) أنشر $(X-3)(X-2)$ (بكالوريا وطنية 2006 د - س)

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(\ln x)^2-5(\ln x)+6=0$.

3) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(\ln x)^2-5(\ln x)+6<0$.

077

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\ln(3-x)-\ln(x-2)=0$.

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\ln(1-\frac{x}{2})<0$. (مكناس 2000 / 1999)

078

أحسب النهايات التالية:

$$C=\lim_{+\infty}\frac{\ln x-3}{1+3\ln x}\ ;\ B=\lim_{(3)^-}\ln(\frac{3-x}{x+1})\ ;\ A=\lim_{(-1)^+}\ln(\frac{3-x}{x+1})$$

$$E=\lim_{+\infty}x\ln(\frac{1+x}{x})\ ;\ D=\lim_{1^+}\frac{\ln x}{x^3-1}$$

$$H=\lim_{0^+}\sqrt{x}\ln x\ ;\ G=\lim_{+\infty}\frac{\ln x-3x}{\ln x+x}\ ;\ F=\lim_{0^+}x^2\ln x$$

079

نعتبر الدالة $f(x)=x-\dfrac{1}{\ln x}$ المعرّفة على $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتائج.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أ) بيّن أنّ: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. (بكالوريا وطنية 2008)

ب) حدّد رتابة f على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]0;1[$.

4) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]\frac{3}{2};2[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

080

لتكن f المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ بحيث: $\begin{cases} f(x)=2x^2(2\ln x+1)\ \ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (مكناس 2000 / 1999)

2) أ) بيّن أنّ f متّصلة على اليمين في 0 .

ب) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ: $f'(x)=8x(\ln x+1)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) أدرس الفرع اللانهائي ل C_f بجوار $+\infty$.

5) أنشئ C_f الوحدة $2cm$. نأخذ: $e\approx 2,7$.

6) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $J=\int_1^2 x^2\ln x\,dx$.

ب) حدّد ب cm^2 مساحة الحيّز المستوي المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=2$.

081

I) لتكن $g(x)=x^2-1+\ln x$ حيث $x\in]0\ ,+\infty[$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$. (بكالوريا وطنية 2003 د - س)

2) أ) أحسب $g'(x)$ ثمّ ضع جدول تغيّراتها.

ب) أحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0\ ,+\infty[$.

II) لتكن الدالة المعرّفة على $]0\ ,+\infty[$ ب: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) حدّد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ج) أدرس الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم $(D):y=x-1$.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ و أدرس إشارتها ثمّ ضع جدول التغيّرات.

3) بيّن أنّ: $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}(3-2\ln x)$ ثمّ استنتج نقطة الانعطاف ل C_f .

4) أنشئ المستقيم (D) و المنحنى C_f .

5) أحسب مساحة الحيّز المحصور بين C_f و (D) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.

بالتوفيق

082

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+x-x\ln x$ المعرّفة على $\mathbb{R}^{*+}$.

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2) تحقّق أنّ $f(x)=x\ln x[\frac{1}{2}(\frac{\ln x}{x})+\frac{1}{\ln x}-1]$.

3) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثمّ حدّد الفرع اللانهائي ل C_f جوار $+\infty$.

4) بيّن أنّ $f'(x)=(\frac{1-x}{x})\ln x$ و ضع جدول التغيرات.

5) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيداً α في المجال $[3;4]$.

6) أنشئ C_f الوحدة $2cm$ ؛ نأخذ $\ln 2\approx 0,7$ و $\ln 3\approx 1,1$.

083

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=-x^2+\frac{x-2}{2x}+\ln x$

1) حدّد D_f .

2) أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أ) أحسب $f'(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{(1-x)(2x^2+2x+1)}{x^2}$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيّرات. **(بكالوريا وطنية 2004 د - س)**

4) أنشئ المنحنى C_f .

5) أ) بيّن أنّ g قصور f على $]0,1]$.تقبل دالة عكسية على مجال J يتمّ تعيينه.

ب) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

084

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=1-(\ln x)^2$.

1) حدّد D_f **(بكالوريا وطنية 2005)**

2) أ) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ج) ضع $t=\sqrt{x}$ ثمّ بيّن أنّ $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

د) استنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب: $f'(x)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) أ) بيّن أنّ: $f''(x)=2\cdot\frac{(-1+\ln x)}{x^2}$ ثمّ بيّن أنّ $I(e,0)$ نقطة انعطاف.

ب) حدّد تقاطع C_f و محور الأفاصيل ثمّ أنشئ C_f (نأخذ: $\frac{1}{e}\approx 0,37$)

5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^e(\ln x)\,dx$.

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^e(\ln x)^2\,dx$.

ج) استنتج حساب مساحة الحيّز المستوي المحصور ب C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$.

بالتوفيق

085

I) لتكن $g(x)=-x+1+x\ln x$ حيث $x\in I=]0,+\infty[$.

1) أحسب $g'(x)$ ثمّ ضع جدول تغيّراتها. **(بكالوريا وطنية 2007 د - س)**

2) استنتج أنّ $\forall x>0:\ g(x)\geq 0$.

II) لتكن الدالة المعرّفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x^2+4x+2x^2\ln x\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ $f'(x)=4g(x)$ و أعط جدول تغيّرات الدالة f .

4) بيّن أنّ $I(1,1)$ نقطة انعطاف وحدّد معادلة المماس في I ثمّ أنشئ C_f .

5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $J=\int_1^3 x^2\ln x\,dx$.

ب) حدّد مساحة الحيّز المستوي المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=3$.

086

I) لتكن $g(x)=x+2-2\ln x$ حيث $x\in I=]0,+\infty[$.

1) أحسب $g'(x)$ ثمّ ضع جدول تغيّراتها. **(بكالوريا وطنية 2006 د - س)**

2) أحسب $g(2)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I .

II) لتكن الدالة المعرّفة على $I=]0,+\infty[$ ب: $f(x)=(1+\frac{2}{x})\ln x$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و أدرس إشارتها ثمّ ضع جدول التّغيّرات.

3) أعط معادلة المماسّ (T) في 1 ثمّ أنشئ المنحنى C_f .

4) أ) أحسب $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ ثمّ أحسب بمكاملة بالأجزاء $I=\int_1^e\ln x\,dx$.

ب) حدّد مساحة الحيّز المستوي المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=e$

087

$\begin{cases} f(x)=-2x+\frac{x}{\ln x}+x\ln x \\ f(0)=0 \end{cases}$ معرّفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$

1) بيّن أنّ f متّصلة على اليمين في 0 .

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

4) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و حدّد الفرع اللانهائي ل C_f جوار $+\infty$.

5) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{[(\ln x)^2+1][\ln x-1]}{(\ln x)^2}$.

6) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيّرات.

7) أنشئ C_f . نقبل أنّ ل C_f نقطة انعطاف أفصولها بين 0 و $\frac{1}{2}$. نأخذ: $e\approx 1,7$