الـــــدوال اللـوغـاريـتـمـيــة

I- دالــة اللـوغـاريتــم النبيـــري :

1- تمهيــد :

نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I ، تقبل دالة أصلية على المجال I.
ونعلم ان الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto x^{r}\right)$ على المجال $\mathbb{R}_{+}^{*}$ بحيث $r \in Q-\{-1\}$ هي الدالة :
$\left(x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C\right)$.

ولدينا : الدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$ متصلة على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ إذن هذه الدالة تقبل دالة أصلية.

وبما أن : $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$

فإن : $r = -1$

فإنه لايمكن استعمال التقنية السابقة لتحديد دالة أصلية لهذه الدالة .

2- تعريــف :

الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$ على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ والتي تنعدم في **1** تسمى دالـة اللـوغـاريتــم النبيــري ونرمز لها بــ $\ln$ أو (Log).

استنتاج :

-1 $\ln(1) = 0$

-2 $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*} \quad ; \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

-3 دالة اللوغاريتم النبري متصلة على $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

-4 دالة اللوغاريتم النبري تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

-5 $\forall x, y \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$x \succ y \Leftrightarrow \ln x \succ \ln y$$

-6 لدينا : $\ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖	0 ↗	↗

إذن : $\ln x \succ 0 \iff 1 \prec x$

$\ln x \prec 0 \iff 0 \prec x \prec 1$

تطبيــق :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x) = \ln(x-1) + \ln(3-x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x-1 \succ 0$ و $3-x \succ 0\}$

إذن : $= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 1$ و $x \prec 3\}$

$D_f =]1 \, , \, 3[$

-2 $f(x) = \ln(1-x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1-x \succ 0\}$

$=]-\infty \, , \, 1[$

-3 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

إذن : $D_f =]-\infty \, , \, 0[\ \cup \ ]1 \, , \, +\infty[$

-3 خاصيــات :

1-3 : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

برهــان :

نضع : $y = a$

و u دالة حيث : $u(x) = \ln(ax)$

لدينا : $u'(x) = a \ \ln'(ax)$

$= \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$

وبما أن : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

فإن : u و $\ln x$ دالتين أصليتين للدالة $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$

إذن : يوجد عدد حقيقي C بحيث : $u(x) = \ln x + C$

إذن : $u(x) = \ln(ax) = \ln x + C$

وبما أن : $u(1) = \ln a = 0 + C$

فإن : $\ln a = C$

إذن : $u(ax) = \ln a + \ln x$

ومنه : $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y}$

2-3 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$

<u>برهـان :</u>

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} 0 = \ln 1 &= \ln \frac{x}{x} \\ &= \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x}$

3-3 :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y}$$

4-3 : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln x^n = n \ln x$

<u>برهـان :</u>

<u>من أجل</u> $n = 0$

$$\begin{aligned} \ln x^0 = \ln 1 &= 0 \\ &= 0 \ln x \end{aligned}$$

<u>من أجل</u> $n = 1$

$$\ln x^1 = 1 \ln x$$

<u>من أجل</u> $n = 2$

$$\begin{aligned} \ln x^2 &= \ln x + \ln x \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

نفترض أن : $\ln x^n = n \ln x$

ونبين أن : $\ln x^{n+1} = (n+1) \ln x$

لدينا :

$$\begin{aligned} \ln x^{n+1} &= \ln x^n \times x \\ &= \ln x^n + \ln x \\ &= n \ln x + \ln x \end{aligned}$$

$$= (n+1)\ \ln x$$

وبالتالي :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln x^n = n\ \ln x}$$

5-3 : $\forall r \in \mathbb{Q}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \ln x^r = r\ \ln x$

برهـان :

نضع : $r = \dfrac{p}{q}$

و : $y = x^r$

إذن : $y = x^{\frac{p}{q}}$

إذن : $y^q = x^p$

$$\ln y^q = \ln x^p$$

$$q\ \ln y = p\ \ln x$$

$$\ln y = \frac{p}{q}\ \ln x$$

إذن :

$$\boxed{\ln x^r = r\ \ln x}$$

حـالات خـاصـة :

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2}\ \ln x$$

$$\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ \ln x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ \ln x$$

4- دراسة الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln x$

1-4 : مجموعة التعريـف :

$$D_f =]0\ ,\ +\infty[\ = \mathbb{R}_+^*$$

2-4 : النهـايــات :

تمهيـد :

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \ln 2^n = n\ \ln 2$

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

و : $\ln 2 \succ 0$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} n\ \ln 2 = +\infty$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

- لنحسب $\lim_{x \to 0^+} \ln x$

نضع : $x = \dfrac{1}{t}$

$$\left(x \to 0^+\right) \Leftrightarrow \left(t \to +\infty\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to 0^+} \ln \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} -\ln t = -\infty$$

إذن :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

3-4 : الفرعين الانهائيين :

لدينا : $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : محور الأراتيب مقرب لـ ℓ_f.

ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

لتكن : u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ : $u(x) = x - \ln x$

لدينا : $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$u(x)$	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$u(1) = 1$$

إذن : $u(x) \geq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $u(x) \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $x - \ln x \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $x \succ \ln x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\sqrt{x} \succ \ln \sqrt{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\dfrac{1}{2} \ln x \prec \sqrt{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $\frac{\ln x}{x} \prec \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $0 \prec \frac{\ln x}{x} \prec \frac{2}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \forall x \in [1,+\infty[$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل.

4-4 : الرتابــة :

لدينا : $\ln'(x) = \frac{1}{x} \succ 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

وبما أن : $1 \in \mathbb{R}$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}_+^*$ ونرمز له بـ e حيث $\ln e = 1$.

بحيث : $e \simeq 2,718$

جـدول التغيــرات f :

x	0		1		e		$+\infty$
$u'(x)$				$+$			
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5-4 : التقعــر :

لدينا : $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : $f''(x) \prec 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

إذن : (ℓ_f) مقعــر.

6-4 : معادلــة المماس في النقطـة 1 .

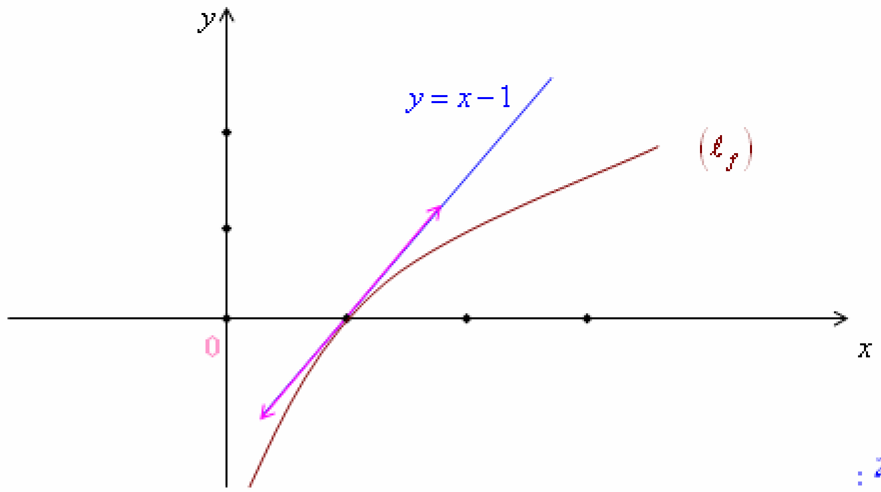
لدينا : $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

إذن : $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

إذن : معادلة المماس لـ ℓ_f في **1** هـي :

$$y = 1(x-1) + 0$$
$$y = x - 1$$

7- : التمثيـل المبيانـــي .



5- نهايـــات مهمـــة :

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$	**1-**
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	**2-**
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	**3-**
$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	**4-**
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	**5-**
$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$	**6-**

بالنسبة لـ **5-** نضع : $x = t - 1$

$$(x \to 0) \Leftrightarrow (t \to 1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$$

بالنسبة لـ **6-** نضع : $x = \frac{1}{t}$

$$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (t \to +\infty)$$

إذن :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln\frac{1}{t}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln t}{t}$$
$$= 0$$

5- تعميـــم :

نعتبر الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \ln(U(x))$

مجموعة تعريف الدالة f :

$$D_f = \{x \in D_f \ / \ U(x) \succ 0\}$$

النهايـات :

- $\lim_{x\to x_0} U(x) = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0} \ln U(x) = +\infty \\ \lim_{x\to x_0} \frac{\ln U(x)}{U(x)} = 0 \end{cases}$

- $\lim_{x\to x_0} U(x) = 0^+ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0} \ln(U(x)) = -\infty \\ \lim_{x\to x_0} U(x) \ln U(x) = 0 \\ \lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1 + U(x))}{U(x)} = 1 \end{cases}$

- $\lim_{x\to x_0} U(x) = 1 \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to x_0} \frac{\ln(U(x))}{U(x) - 1} = 1 \right.$

مشتقة الدالة f :

إذا كانت U قابلة للاشتقاق وموجبة قطعا على I.

$$\forall x \in I \ ; \ f'(x) = \ln'(U(x))^3 \times U'(x)$$
$$= \frac{U'(x)}{U(x)}$$

مثـال : 1- $f(x) = \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

-2 $f(x) = \ln\sqrt{x}$

ط1 $f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{2x}$$

ط2

لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

-3 $f(x) = \ln\left(\sqrt[4]{x^2+1}\right)$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(x^2+1\right)$$

إذن : $f'(x) = \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}$$

تعريف :

u دالة قابلة للاشتقاق على u ولا تنعدم.

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على I.

استنتاج :

الدوال الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$ هي الدوال $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ $C \in \mathbb{R}$

ملاحظة :

$$u(x) \succ 0 \Rightarrow f(x) = \ln u(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$u(x) \prec 0 \Rightarrow f(x) = \ln |-u(x)|$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

إذن : إذا كانت : $f(x) = \ln |u(x)|$

فإن : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

مثال :

$$f(x) = \ln\left|x^2 - 3x + 1\right|$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

تطبيقـات :

تمريـــن 1 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التاليــة :

-1 $f(x) = \ln(2x-1)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x - 1 \succ 0\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \left]\frac{1}{2} \ , \ +\infty\right[$$

-2 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ \ln x \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ x \neq 1\}$$

إذن : $D_f =]0 \ , \ 1[\ \cup \ ]1 \ , \ +\infty[$

-3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ \ln x \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ x \geq 1\}$$

$$D_f = [1 \ , \ +\infty[$$

-4 $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$

ملاحظـة :

لدينــا : $\ln e = 1$

إذن : لكل a مــن $\mathbb{R}$.

$$a \ \ln e = a$$

إذن : $\ln e^a = a$

لدينـا : $D_f = \{x \in \mathbb{R}_+^* \ / \ 1 - \ln^2 x \geq 0\}$

ولدينا : $(1 - \ln^2 x) = (1 - \ln x)(1 + \ln x)$

$$1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 = \ln e$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e$$

$$1 + \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 = \ln e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-\ln x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$1-\ln^2 x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$D_f = \left[\frac{1}{e} , e\right]$$

-5 $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}}$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

إذن : $\quad D_f = \left]0 , \frac{1}{e}\right] \cup \left]e , +\infty\right[$

تمريـــن 2 :

-1 $\quad \ln x + \ln(x+1) = \ln 6$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \quad \text{و} \quad x \succ -1\}$$
$$= \left]0 , +\infty\right[$$

$$\forall x \in D_f \ ; \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x \times (x+1)) = \ln 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

لدينا : $\quad \Delta = 25$

إذن : $\quad x_1 = -3 \quad$ و $\quad x_2 = 2$

وبما أن : $\quad x \succ 0$

فإن : $\quad S = \{2\}$

-2 $\quad \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

لدينا : $\quad D_f = \left]0 , +\infty\right[$

نضع : $\quad X = \ln x$

إذن : $\quad (E_2) \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0$

لدينا : $\Delta = 9 - 8 = 1$

إذن : $x_1 = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$ أو $x_2 = \dfrac{3 + 1}{2} = 2$

إذن : $\ln x = 1$ أو $\ln x = 2$

إذن : $x = e$ أو $x = e^2$

إذن : $S = \{e , e^2\}$

-3 $(E_3) : \ln x + \sqrt{\ln x} - 2 = 0$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \ln x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* \ / \ x \geq 1\} \\ &= [1 , +\infty[\end{aligned}$$

نضع : $\sqrt{\ln x} = X$ حيث $X \geq 0$

إذن : $X^2 + X - 2 = 0$

لدينا : $\Delta = 1 + 8 = 9$

إذن : $X = \dfrac{-1 + 3}{2}$ أو $X = \dfrac{-1 - 3}{2}$

$X = 1$ أو $X = -2$

وبما أن : $-2 \prec 0$

فإن : $X = 1$

إذن : $\sqrt{\ln x} = 1$

$\ln x = 1$

أي : $x = e$

إذن : $S = \{e\}$

تمريـــن 3 :

لنحسب النهايــات :

-1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= 0$$

-2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \cdot \frac{x+1}{x}$

نضع : $X = x+1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

و : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$

-3 $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x\,(x \ln x)$

$= 0 \times 0 = 0$

-3 : bis $\lim_{x\to 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\ \ln x\right)^2$

$= \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}^2\right)^2$

$= \lim_{x\to 0^+} 2^2 \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}\right)^2$

$= \lim_{x\to 0^+} 4 \left(\sqrt{x}\ \ln \sqrt{x}\right)^2$

$= 0$

-4 $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1}(x \ln x)$

$= 0$

-4 : bis $n\in\mathbb{N}$ ، $\lim_{x\to 0^+} x \ln^n(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt[n]{x}\ \ln \sqrt[n]{x}^n\right)^n$

نضع : $\sqrt[n]{x} = X$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} x \ln^n(x) = n^n\ (X \ln X)^n$

$= 0$

مثـــال :

لنحسب : $\lim_{x\to 0^+} x \ln^3 x$

نضع : $X = \sqrt[3]{x}$

إذن : $x = X^3$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} x \ln^3 x = \lim_{X\to 0^+} X^3 \ln^3 X^3$

$= \lim_{X\to 0^+} X^3 \left(3 \ln^3 X\right)^3$

$= \lim_{X\to 0^+} 27 \left(X \ln X\right)^3$

$$= \ 0$$

-5 من أجل $n=2$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln X}{X} = 0$$

-6 $\lim_{x \to -\infty} x + \ln\left(x^2+1\right)$

ط1 :

$$\lim_{x \to -\infty} x + \ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x \left(1 - 2\frac{\ln(-x)}{-x}\right)$$

نضع : $-x = t$

$$= \lim_{x \to -\infty} -t \left(1 - 2\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

$$= -\infty$$

ط2 :

$$\lim_{x \to -\infty} x + \ln\left(x^2+1\right) = \lim_{x \to -\infty} x + \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x + \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1+\frac{\ln x^2}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln(-x)}{-x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\infty$$

تمريـــن 4 :

تذكيـــر :

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln U(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$f(x) = \ln |U(x)| \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

-1 $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

ط1 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

ط2 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1|$$

إذن :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

-2 $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)'x - (\ln x + 1)x'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-\ln x}{x^2}$$

-3 $f(x) = \ln|\ln x|$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \succ 0 \ \text{و} \ \ln x \neq 0\}$$

$$=]0\,,\,1[\cup]1\,,\,+\infty[$$

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{x\ \ln x}$$

-4 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad x^2+1 \succ x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad \sqrt{x^2+1} \succ |x|$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad \sqrt{x^2+1} + x \succ 0$

ومنه : $D_f = \mathbb{R}$

ولدينا : $\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

تمريـــن 5 :

$$f(x) = \frac{2\ \ln|x|}{x^2}$$

-1 $D_f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 0$ أو $|x| \succ 0\}$

$= \mathbb{R}^*$

* $\forall x \in D_f \quad ; \quad -x \in D_f$

و : $f(-x) = \dfrac{2\ \ln|-x|}{(-x)^2}$

$$= \frac{2\ \ln|x|}{x^2}$$

ومنه : $f(-x) = f(x)$

وبالتالي : f دالة زوجيــة.

-2 أ-

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{2\ \ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{2}{x^2} \cdot \ln(x)$$

$$= (+\infty)\ (-\infty)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ \ln(x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}\ \frac{\ln x}{x}$$
$$= 0$$

ب- * $\forall x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{2\ \ln|x|}{x^2}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2\ \ln x)'x^2 - (x^2)'(2\ \ln x)}{x^4}$$
$$= \frac{2x - 2x\ (2\ \ln x)}{x^4}$$
$$= \frac{2x\ (1 - 2\ \ln x)}{x^4}$$

ومنه : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad f'(x) = \dfrac{2\ (1 - 2\ \ln x)}{x^3}$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ;\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ \ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

ومنه :

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$1/e$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

3- أ- لدينا : $f(1) = 0$

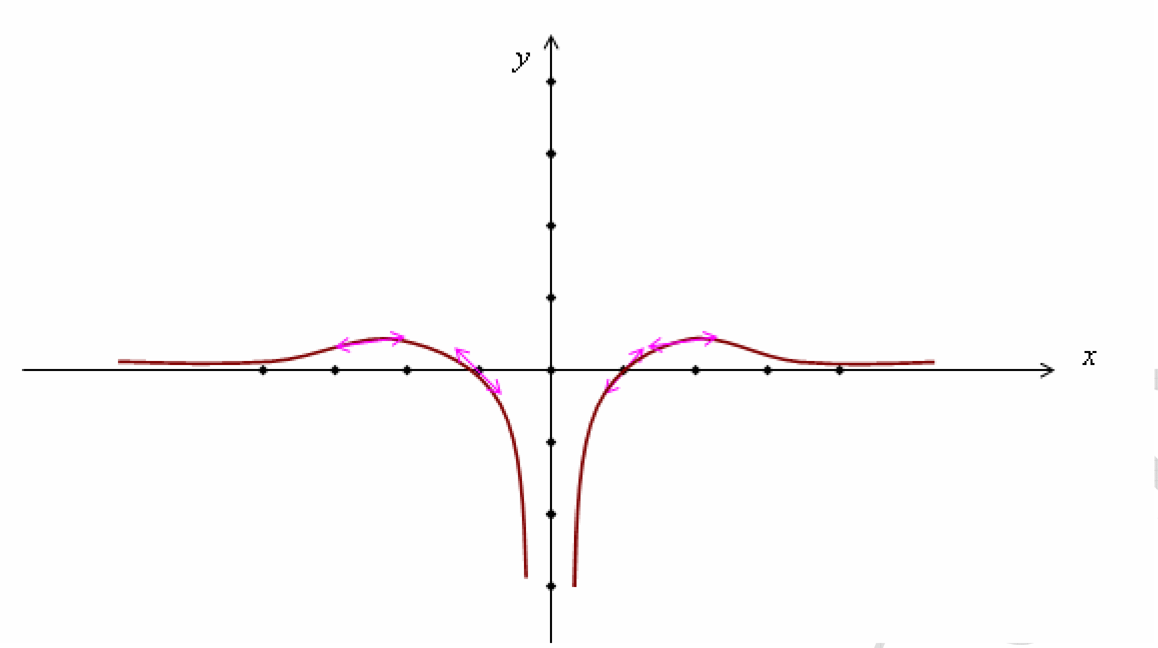
وبما أن : $f'(1) = 2$

$$y = f'(x)(x-1) + f(1)$$

فإن : $y = 2\ (x-1)$

$$y = 2x - 2$$

هـي معادلـة ديكارتيـة للممـاس للمنحنى (ℓ_f) فـي النقطة A ذات الأفصول 1 .



دالــة اللــوغـاريتــم للأســاس a :

تعريـــف :

لتكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا ومخالفا للعدد 1.

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

الدالة $\left(x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a} \right)$ تسمى دالــة اللـوغـاريتـم للأســاس a. ونرمز لها بـ $\log_a$.

أي أن :
$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مثـــال :

-1
$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

-2
$$\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

-3
$$\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظـــة :

$$\log_a(a) = 1$$

خاصيـات :

-1 لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

-2 لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:
ولكل n من $\mathbb{N}$ ،
ولكل r من $\mathbb{Q}$ ،

$$\log_a\left(x^n\right) = n \log_a(x)$$
$$\log_a\left(x^r\right) = r \log_a(x)$$

دراسة الدالــة $\log_a$

لتكن f_a الدالة المعرفة بـ : $f_a(x) = \log_a(x)$

مجموعة التعريـف :

$$D_a = \left]0 , +\infty\right[$$

النهايـات :

الحالة 1 : $a \succ 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$$

الحالة 2 : $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

التغيـرات :

لكل x مـن $\mathbb{R}_+^*$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ \ln a}$$

الحالة 1 : $a \succ 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الحالة 2 : $0 \prec a \prec 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

الفـروع اللانهائيـة :

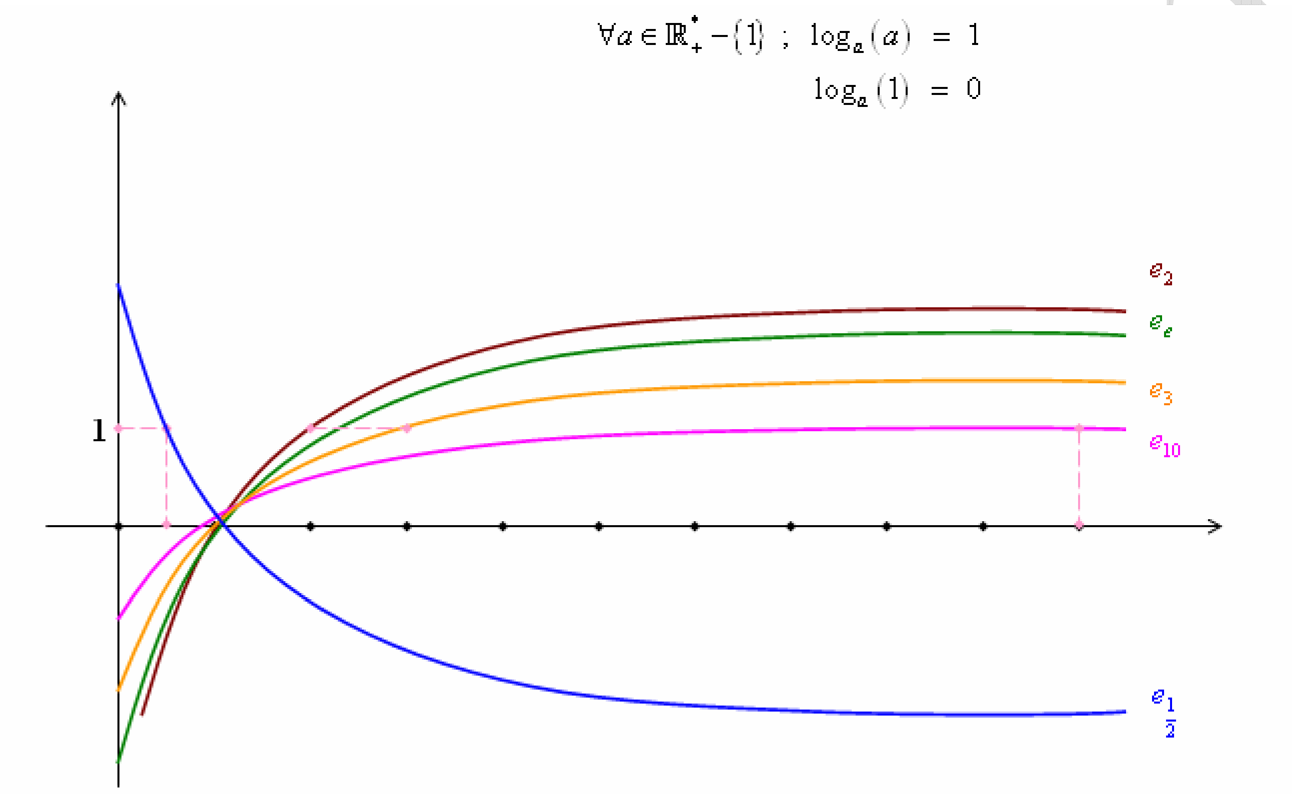
لدينا : $\left|\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x)\right| = +\infty$

إذن : $(x=0)$ مقــارب لـ (ℓ_f).

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a} = 0$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمثيـل المبيانــي :



حالــة خاصـة :

إذا كانت $a=10$

فإن الدالة $\log_{10}$ تسمى دالــة اللوغــاريتــم العشــري، ونرمز لها بـ $\log$.

استنتــاج :

-1 $\log_{10} = 1$

-2 $\log_{10^x} = x$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

-3 $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$; $\log(xy) = \log x + \log y$

-4 $\log\dfrac{x}{y} = \log x - \log y$

ملاحظـة :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \;;\; \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\log x = y \iff x = 10^y$$