ثانوية بئر أنزران ـ صفرو ـ
2009/2008 (الدّورة 1)

# المتتاليات العددية

الثّانية بكالوريا محاسبة و تدبير 1 و 2
ذ: توفيق بنعمرو

### 033

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{-9}{6+u_n}$ و $u_0=2$ .

**1)** بيّن أنّ لكلّ $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n>-3$ .

**2)** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً، ماذا تستنتج ؟

### 034

حدّد نهايات المتتاليات التّالية:

$$a_n=2^n\cdot 3^{1-n} \text{ و } b_n=\frac{3^n+5^n}{3^n-2\cdot 5^n} \text{ و } c_n=\frac{3n^2+n-5}{5+2n^2} \text{ و } d_n=\frac{(-1)^n}{n}$$

### 035

نعتبر المتتالية $u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}$ .

بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{n^2}{n^2+n}\le u_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### 036

لتكن $(u_n)_n$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{5u_n-3}{u_n+1}$ و $u_0=2$ .

**1)** أدرس رتابة الدالة $f(x)=\frac{5x-3}{x+1}$ على $I=[2\ ,3]$ و حدّد $f(I)$ .

**2)** بيّن أنّ: $(\forall n\in\mathbb{N}^*): 2<u_n<3$ .

**3)** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعاً و استنتج أنّها متقاربة ثمّ حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### 037

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q$ بحيث: $125\cdot u_7=8\cdot u_4$ .

**1)** حدّد قيمة الأساس $q$ .

**2) أ)** حدّد قيمة الحدّ الأوّل $u_0$ علماً أنّ: $u_3=\frac{4}{25}$ . **( بكالوريا وطنية 2005 )**

**ب)** بيّن أنّ: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}=\frac{25}{6}(1-(\frac{2}{5})^n)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ .

### 038

نعتبر المتتاليتين: $u_0=30$ و $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+20$ و $v_n=u_n-25$ .

**1) أ)** بيّن أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ و حدّد حدّها الأوّل. **( بكالوريا وطنية 2008 د ع )**

**ب)** أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أنّ $u_n=25+5(\frac{1}{5})^n$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

**2)** نفترض أنّ $u_n$ هو مبلغ تكلفة منتوج ما لشركة في السنة $2007+n$ بملايين الدراهم.
ابتداء من أيّة سنة سيكون مبلغ التكلفة أصغر قطعاً من 25,0016 مليون درهم ؟

### 039

نعتبر المتتاليتين $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$ و $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$ .

**1)** بيّن أنّ $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و حدّد $v_0$ ثمّ أحسب $v_n$ بدلالة $n$ **( بكالوريا وطنية 2008 د س )**

**2)** بيّن أنّ $u_n=\frac{4+v_n}{1-v_n}$ و استنتج أنّ $u_n=\frac{4(1-(\frac{1}{6})^n)}{1+4(\frac{1}{6})^n}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### 040

**( بكالوريا وطنية 2003 )**

اشترى شخص سيارة بثمن $u_0=150000Dh$ سنة 2003. نفترض أنّ قيمة هذه السّيارة تنخفض ب 10 % كلّ سنة من قيمتها في السّنة التي تسبقها. نرمز ب $u_n$ لقيمة السّيارة سنة $2003+n$ .

**1)** أحسب $u_1$ و $u_2$ ثمّ أحسب $u_n$ بدلالة $u_{n-1}$ و استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

**2)** ابتداء من أيّ سنة ستصبح قيمة هذه السّيارة أقلّ من خُمُس ثمن شرائها سنة 2003.

### 041

نضع $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ .

بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le u_n\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

**بالتوفيق**

### 042

**( بكالوريا وطنية 2007 د س )**

**1)** لتكن $(v_n)_n$ **متتالية هندسية حدّها الأول** $v_0=1$ **و أساسها** $q=\frac{1}{2}$ ، أحسب $v_n$ بدلالة $n$ .

**2)** نضع $u_n=v_n-\frac{n}{2}$ و $S_n=u_0+...+u_{n-1}$ و $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ .

أحسب $S'_n$ بدلالة $n$ و بيّن أنّ $S_n=2[1-(\frac{1}{2})^n]-\frac{n(n-1)}{4}$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ .

### 043

**( فاس 2001 / 2002 )**

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{u_n}{3}+n-1$ و $u_0=1$ و $v_n=4u_n-6n+15$ .

**1)** بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدّد $v_n$ بدلالة $n$ .

**2)** بيّن أنّ: $u_n=\frac{19}{4}(\frac{1}{3})^n+\frac{3}{2}n-\frac{15}{4}$ ثمّ أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_n$ .

**3)** بيّن أنّ: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}=\frac{3}{4}n^2-\frac{9}{2}n-\frac{57}{8}(\frac{1}{3})^n+\frac{57}{8}$ .

### 044

لتكن $(u_n)_n$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{1}{2}(\frac{n+2}{n+1})^2\cdot u_n$ و $u_0=1$ .

**1)** أحسب $u_1$ و $u_2$ .

**2)** نضع: $v_n=\frac{u_n}{(n+1)^2}$ ، **أ)** بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل $v_0$ .

**ب)** أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

3) أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n=\frac{u_0}{1^2}+\frac{u_1}{2^2}+\frac{u_2}{3^2}...+\frac{u_n}{(n+1)^2}$ . **( مكناس 2001/2000 )**

### 045

لتكن $(u_n)_n$ بحيث: $u_0=1$ و $u_{n+1}=a^2u_n+2(1-a^2)$ حيث: $-1<a<1$ .

**1)** أحسب $u_1$ و $u_2$ و $u_3$ .

**2)** نضع: $v_n=u_n-2$ ، بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل $v_0$ .

**3)** أكتب $u_n$ بدلالة $n$ و $a$ ثمّ أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ . **( مكناس 2000/1999 )**

### 046

**( مراكش 1999 / 2000 )**

تقترح وكالة عقارية على زبائنها عقدتين مختلفتين لكراء محلّ تجاري لمدّة عشر سنوات.
( الكراء يؤدّى سنوياً ) واجب الكراء للسّنة الأولى هو 12000 درهماً بالنّسبة للعقدتين معاً.

**1)** تنصّ العقدة 1 على زيادة ثابتة سنوياً قدرها 800 درهم.

**أ)** أحسب $u_1$ واجب الكراء للسّنة الثّانية ثمّ أحسب بدلالة $n$ ، $u_n$ واجب الكراء للسّنة $n+1$ .

**ب)** أحسب مجموع مستحقّات الكراء للعشر سنوات المحدّدة في العقدة الأولى.

**2)** تنصّ العقدة 2 على أن تضاف في كلّ سنة 5 % من واجب كراء السّنة التي قبلها.

**أ)** أحسب $v_1$ واجب الكراء للسّنة الثانية ثمّ أحسب بدلالة $n$ ، $v_n$ واجب الكراء للسّنة $n+1$ .

**ب)** أحسب مجموع مستحقّات الكراء للعشر سنوات المحدّدة في العقدة 2. ( $(1,05)^{10}\approx 1,6$ )

3) أيّ العقدتين أفضل للزّبون ؟

### 047

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-\frac{1}{2}$ و $u_0<-2$ .

**1)** بيّن أنّ: $u_n<-2$ مهما كان $n$ من $\mathbb{N}$ .

**2)** بيّن أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و استنتج أنّها متقاربة. **( بني ملال 98/97 )**

**3)** أثبت أنّ: $u_{n+1}=(u_0+2)\cdot(\frac{3}{4})^{n+1}-2$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

### 048

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ بحيث: $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ و $u_0=1$ و $u_1=2$ .

**1)** لتكن: $v_n=u_{n+1}-u_n$ بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية ثمّ أحسب $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ .

**2)** استنتج أنّ: $u_n=2(1-(\frac{1}{2})^n)+1$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ . **( فاس 97/96 د س )**

# المتتاليات العددية تمارين إضافية

### 049

$(u_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$ و حدّها الأوّل $u_0=\ln\sqrt{2}$ .

1) أحسب $u_0$ ثمّ بيّن أنّ: $u_0+u_1+....+u_{19}=-85\ln 2$ .

2) لتكن $(v_n)_n$ المتتالية المعرّفة ب: $v_n=e^{u_n}$ . **( بكالوريا وطنية 2006 د ع)**

أ) بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ محدّداً حدّها الأوّل.

ب) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، بيّن أنّ: $S_n=\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n)$ . و حدّد $\lim_{n\to+\infty}S_n$

### 050

**( بكالوريا وطنية 2006 د س )**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q$ و حدّها الأوّل $u_0=3$ بحيث $343u_8=64u_5$ .

1) بيّن أنّ $q=\frac{4}{7}$ ثمّ أكتب $u_n$ بدلالة $n$ .

2) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ أحسب $S_n$ بدلالة $n$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$ .

### 051

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q$ بحيث $125u_7=8u_4$ .

1) حدّد قيمة الأساس $q$ .

2) أ) حدّد قيمة الحدّ الأوّل $u_0$ علماً أنّ $u_3=\frac{4}{25}$ . **( بكالوريا وطنية 2005 )**

ب) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ بيّن أنّ $S_n=\frac{25}{6}(1-(\frac{2}{5})^n)$ ثمّ حدّد $\lim_{n\to+\infty}S_n$

### 052

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{9x}{x^2+6}$ المعرّفة على المجال $I=[0,\sqrt{3}]$ .

1) أدرس رتابة $f$ على $I$ ثمّ بيّن أنّ $f(I)\subset I$ .

2) نعتبر المتتالية: $u_{n+1}=\frac{9u_n}{u_n^2+6}$ و $u_0=1$ .

أ) بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in I$ .

ب) بيّن بالترجع أنّ $(u_n)$ تزايدية ثم استنتج أنّها متقاربة محدّداً نهايتها.

**بالتوفيق**

### 053

نعتبر المتتاليتين: $u_n=2(\frac{1}{2})^{n-1}$ و $v_n=1-\frac{u_n}{n}$

1) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}v_n$ .

2) نضع $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و $S'_n=v_1+2v_2+3v_3+...+nv_n$ .

بيّن أنّ $S'_n+S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ و أحسب $S_{10}$ واستنتج $S'_{10}$ تعطى النتيجتان على شكل كسر

### 054

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدّها الأوّل $u_0$ و أساسها $q$ .

1) حدّد $q$ و $u_0$ إذا علمت أنّ: $u_1=\frac{40}{9}$ و $u_4=\frac{320}{243}$ . **( بكالوريا وطنية 2004 د س )**

2) بيّن أنّ: $u_n=\frac{20}{3}(\frac{2}{3})^n$ ثمّ أحسب: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ .

3) أ) حدّد أصغر قيمة $p$ للعدد $n$ بحيث: $u_n\le 10^{-25}$ .

ب) بيّن أنّ لكلّ $n$ أكبر من أو يساوي $p$ لدينا: $S_n\ge 20-3.10^{-25}$ .

### 055

**( بكالوريا وطنية 2007 د ع )**

$(u_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r=\ln(2)$ و حدّها الأوّل $u_0=1$ .

1) أحسب $u_1$ و $u_2$ و أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ .

2) أ) لتكن $v_n=e^{-u_n}$ ، بيّن أنّ $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدّد $v_n$ بدلالة $n$ .

ب) **نضع** $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ **، أحسب** $S'_n$ **بدلالة** $n$ **و استنتج** $\lim_{n\to+\infty}S'_n$ **.**

### 056

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $r>0$ و حدّها الأوّل $u_0=2$ بحيث $u_0+u_1+u_2=\frac{7}{2}$ .

1) بيّن أنّ: $r=\frac{1}{2}$ .

2) أ) لتكن $v_n=\ln(u_n)$ . أحسب $v_0$ ثمّ بيّن أنّ $(v_n)_n$ حسابية محدّداً أساسها.

ب) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ ، بيّن أنّ: $S_n=\frac{n}{2}(-n+3)\ln 2$ .

ت) حدّد أصغر عدد صحيح طبيعي $n$ يحقّق $S_n+9\ln 2\le 0$ .

### 057

استثمر صيدلي في مشروع إنشاء صيدلية مبلغاً مالياً قدره 100000 درهم و لاحظ أنّ ربحه الصّافي في الشهر الأوّل هو 5000 هم و أنّ ربحه الصّافي لكلّ شهر يزيد بنسبة 5% عن ربحه الصّافي للشّهر الذي يسبقه.

نضع: $u_1$ الربح الصّافي للصيدلي في الشهر الأوّل و $u_n$ الربح الصّافي للصيدلي في الشهر $n$ .

1) أحسب $u_n$ بدلالة $u_{n-1}$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

2) أحسب مجموع الأرباح الصّافية ل $n$ شهراً الأولى.

3) إذا علمت أنّ الصيدلي يدّخر 30% من ربحه الصّافي، فبعد كم شهراً سيدّخر قيمة المبلغ المستثمر في مشروعه.

### 058

نعتبر $(u_n)$ المعرّفة ب: $u_0=0$ و $u_1=1$ و $u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n$ .

1) بيّن أنّ المتتالية $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثمّ أكتب $v_n$ بدلالة $n$ .

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $w_n=5^n u_n$ حسابية أساسها 5 .

ب) أكتب $w_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

3) أ) بيّن أنّ: $\forall n\in\mathbb{N}^*: 0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$

ب) استنتج أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*: 0<u_n\le(\frac{2}{5})^{n-1}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ .

### 059

$(u_n)$ و $(v_n)_n$ بحيث $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}$ و $u_0=2$ و $v_n=3u_n+1$ .

1) بيّن أنّ $(v_n)_n$ هندسية محدّداً أساسها $q$ و حدّها الأوّل $v_0$ .

2) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أنّ $u_n=\frac{1}{3}(7(\frac{1}{4})^n-1))$ و أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$ .

3) نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ .

أحسب $S_n$ بدلالة $n$ . و استنتج حساب $S_n'=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n'$

### 060

$u_n=n+(\frac{1}{3})^n$ , $n\in\mathbb{N}^*$ ، أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

### 061

نعتبر المتتالية: $U_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$

1) تحقّق أنّ: $\forall x>0: \frac{1}{\sqrt{x}}>2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ .

2) استنتج أنّ: $\forall n\ge 1: U_n>2\sqrt{n+1}-2$ ثمّ حدّد نهاية المتتالية $(U_n)$ .

### 062

1) نعتبر الدالة $f(x)=x(\sqrt{x}-2)^2$ . حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$ .

2) بيّن أنّ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}: f'(x)=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ و حدّد $f([0,1])$ .

3) لتكن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=\frac{1}{4}$ . بيّن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in[0,1]$ .

4) أدرس رتابة $u_n$ و استنتج أنّها متقاربة محدّداً نهايتها.