المتتاليات العددية

2 بكالوريا محاسبة و تدبير 1 و 2
ذ: توفيق بنعمرو

$(U_n)_{n\ge n_0}$ حسابية إذا وُجِدَ r بحيث: $\forall n\ge n_0 : U_{n+1}-U_n=r$

$(V_n)_{n\ge n_0}$ هندسية إذا وُجِدَ k بحيث: $\forall n\ge n_0 : V_{n+1}=k\cdot V_n$

$(U_n)_{n\ge n_0}$ حسابية $\Leftrightarrow$ $\forall n>n_0 :\ 2U_n=U_{n-1}+U_{n+1}$

$(V_n)_{n\ge n_0}$ هندسية $\Leftrightarrow$ $\forall n>n_0 :\ V_n^{\,2}=V_{n-1}\times V_{n+1}$

$(U_n)_n$ حسابية أساسها r، لدينا:
$U_n=U_0+n\times r$
$U_n=U_p+(n-p)\times r$

$(V_n)_n$ هندسية أساسها k، لدينا:
$V_n=V_0\times(k)^n$
$V_n=V_p\times(k)^{n-p}$

$$1+2+3+.....+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$U_0+U_1+...+U_n=\frac{n+1}{2}\times(U_0+U_n)$$

$$U_p+U_{p+1}+...+U_n=\frac{n-p+1}{2}\times(U_p+U_n)\ ,\ n>p$$

(الحدّ الأوّل + الحدّ الأخير) × $\dfrac{\text{(عدد الحدود)}}{2}$

$$1+k+k^2+.....+k^{n-1}+k^n=\frac{1-k^{n+1}}{1-k}\qquad k\neq 1$$

$$V_0+V_1+...+V_n=V_0\times\frac{1-(k)^{n+1}}{1-k}$$

$$V_p+V_{p+1}+...+V_n=V_p\times\frac{1-(k)^{n-p+1}}{1-k}\ ,\ n>p$$

(الحدّ الأوّل) × ($\dfrac{1 - (\text{الأساس})^{(\text{عدد الحدود})}}{1 - (\text{الأساس})}$)

$(u_n)_n$ تزايدية، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ \ge\ u_n$.
$(u_n)_n$ تناقصية، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ \le\ u_n$.
$(u_n)_n$ ثابتة، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ =\ u_n$.

$(u_n)_n$ مكبورة ب A، إذا كان: $\forall n:\ u_n\ \le\ A$
$(u_n)_n$ مصغورة ب B، إذا كان: $\forall n:\ u_n\ \ge\ B$
$(u_n)_n$ محدودة ب A و B، إذا كان: $\forall n:\ A\le u_n\ \le\ B$

$(\forall n: u_n>0$ و $\forall n: \frac{u_{n+1}}{u_n}\ \ge 1) \Rightarrow$ ($(u_n)_n$ تزايدية)

$(\forall n: u_n>0$ و $\forall n: \frac{u_{n+1}}{u_n}\ \le 1) \Rightarrow$ ($(u_n)_n$ تناقصية)

$(u_n)_n$ تزايدية: $u_0\le u_1\le u_2\le ...\le u_{n-1}\le u_n\le u_{n+1}....$

$(u_n)_n$ تناقصية: $...\le u_{n+1}\le u_n\le u_{n-1}\le ...\le u_1\le u_0$

$(u_n)_n$ متقاربة، إذا كانت نهايتها منتهية.

$(u_n)_n$ متباعدة، إذا كانت نهايتها غير منتهية أو ليست لها نهاية

كلّ متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
كلّ متتالية تزايدية و سالبة هي متقاربة.

كلّ متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.
كلّ متتالية تناقصية و موجبة هي متقاربة.

$\forall n>n_0:\ u_n\ \le\ v_n$ و $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ و $\lim\limits_{+\infty} v_n=\ell' \Rightarrow \ell\le\ell'$

$(\forall n>n_0:\ u_n\ \le\ v_n$ و $\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty) \Rightarrow (\lim\limits_{+\infty} v_n=+\infty)$

$(\forall n>n_0:\ u_n\ \le\ v_n$ و $\lim\limits_{+\infty} v_n=-\infty) \Rightarrow (\lim\limits_{+\infty} u_n=-\infty)$

$(\forall n>n_0: |u_n-\ell|\le\ v_n$ و $\lim\limits_{+\infty} v_n=0) \Rightarrow (\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell)$

$$\begin{cases}\forall n>n_0:\ u_n\ \le\ a_n\ \le\ v_n\\ \lim\limits_{+\infty} u_n=\lim\limits_{+\infty} v_n=\ell\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} a_n=\ell$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(q)^n=+\infty \qquad q>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(q)^n=1 \qquad q=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(q)^n=0 \qquad -1<q<1$

$q\le -1$ المتتالية $(\ q^n\ )_n$ لا تقبل نهاية.

$r>0 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}(n)^r=+\infty$

$r<0 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}(n)^r=0$

$(\ \ell\neq 0$ و $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell\ ) \Rightarrow (\ \lim\limits_{+\infty}|u_n|=|\ell|\ )$

$(\ \lim\limits_{+\infty} u_n=0\ ) \Leftrightarrow (\ \lim\limits_{+\infty}|u_n|\ =\ 0\ )$

إذا كانت f دالة متّصلة على مجال I بحيث $f(I)\subset I$
و $(u_n)_{n\ge n_0}$ متقاربة و $\forall n\ge n_0: u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_{n_0}\in I$.
فإنّ $\ell=\lim\limits_{+\infty} u_n$ يحقّق: $f(\ell)=\ell$.

إذا كان $\lim\limits_{+\infty} U_n=\ell$ و f دالة متّصلة في ℓ
فإنّ المتتالية $(V_n)_{n\ge n_0}$ حيث $\forall n\ge n_0:\ V_n=f(U_n)$ متقاربة
و $\lim\limits_{+\infty} V_n=f(\ell)$.