Suites numeriques

تمرين 1 نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب $U_0 = 4$ ولكل n من $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 3)$

ولتكن V_n المتتالية المعرفة ب $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_n - 3$

1) بين أن V_n متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول

2) اكتب V_n و (U_n) بدلالة n ثم بين أن (U_n) تناقصية ب 3

3) أ- بين أن : $S_n = U_0 + U_1 + ...U_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$

ب- احسب $\lim S_n$

تمرين 2 لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = 2U_n + 3^n \end{cases}$

1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n$ ثم ادرس رتابة (U_n)

2) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = 3^n - U_n$

أ- بين أن (U_n) هندسية أساسها 2

ب- احسب V_n ثم U_n بدلالة n

ت- احسب نهاية (U_n)

ج- احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

تمرين (3) :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب $U_0 = 4$ ولكل n من $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 3)$

ولتكن V_n المتتالية المعرفة ب $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_n - 3$

4) بين أن V_n متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول

5) اكتب V_n و (U_n) بدلالة n ثم بين أن (U_n) تناقصية ب 3

6) أ- بين أن : $S_n = U_0 + U_1 + ...U_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$

ب- احسب $\lim S_n$

تمرين (4) :

لتكن U_n المتتالية العددية حيث : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n + 3^n \end{cases}$

1/ بين أنه لكل $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \ge 0$ ثم ادرس رتابة المتتالية U_n

2/ نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = 3^n - U_n$

أ- بين أن V_n متتالية هندسية أساسها 2

ب- احسب V_n ثم U_n بدلالة n

ت- احسب نهاية U_n

ث- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

تمرين -5-

لتكن (u_n) المتتالية العددية حيث : $u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^{\,2} + 9}$

1. بين أنه : $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_n \succ \sqrt{3}$
2. بين أن (u_n) متتالية تناقصية قطعا.
3. استنتج أن (u_n) متقاربة
4. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n^{\,2} - 3$

a) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

c) احسب نهاية (u_n).

تمرين -6-

لتكن (u_n) نعتبر المتتالية العددية حيث : $u_0 = 0$ و $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = 2u_n + 3^n$

1- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n \geq 0$، ثم ادرس رتابة المتتالية (u_n).

2- نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 3^n - u_n$

a- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

b- احسب v_n ثم u_n بدلالة n

c- احسب نهاية (u_n)

d- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

تمرين -7-

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بما يلي : $u_1 = v_1 = 1$ و $3u_n - v_{n-1} = \frac{2-n}{n-1}$ و

$u_n - v_n = -1 + \frac{1}{n}$

$\forall n \in \left(\mathbb{N}^* - \{-1\}\right)$

1) أ- احسب u_2 و v_2.

ب- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

ج- احسب u_n ثم v_n بدلالة n من $\mathbb{N}^*$.

2) أ- باستعمال النتيجة : $3^{n-1} \geq n$ ، لكل n من $\mathbb{N}^*$، تحقق من أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \;;\; u_n \leq \frac{1}{n}$

ب- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \;;\; 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$

ج- استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها.

تمرين -8-

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+2} = \frac{1}{7}\left(8u_{n+1} - u_n\right) \end{cases}$$

ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n=u_{n+1}-u_n$

1) a- احسب u_2 و v_0.

b- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

2) a- احسب، بدلالة n، المجموع $v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$

b- استنتج أنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

تمرين -9-

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ ولكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{9u_n+9}{2u_n+6}$

نقبل أن : $(\forall n\in\mathbb{N}: u_n\neq 3)$ ونعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=\frac{2u_n+3}{2u_n-6}$

1- بين ان المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها العدد 4.

2- أ- حدد v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين أن n من $\mathbb{N}$: $u_n=\frac{6\times 4^{n+1}-15}{2\times 4^{n+1}+10}$

ج- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

تمرين -10-

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0=\frac{10}{3} \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{u_n}\left(u_n^2-3u_n+9\right)\end{cases}$$

1) برهن أن : $u_n\succ 3$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$

2) a- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

b- استنتج أن $3\prec u_n\prec\frac{10}{3}$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$

3) a- بين أن $u_{n+1}-3\leq\frac{1}{3}(u_n-3)$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$

b- استنتج أن $0\leq u_n-3\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

تمرين -11-

لتكن (u_n) المتتالية العددية حيث : $u_0=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9}$

5. بين أنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\succ\sqrt{3}$
6. بين أن (u_n) متتالية تناقصية قطعا.
7. استنتج أن (u_n) متقاربة
8. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_n^2-3$

a) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

c) احسب نهاية (u_n).

تمرين -12-

نضع لكل z من $\mathbb{C}$: $P(z)=z^3-(2+3i)z^2+(1+4i)z+2-3i$

$Q(z)=z^2-2(1+i)z+3+2i$

1. اكتب على الشكل الجبري حلي المعادلة : $Q(z)=0$, $z\in\mathbb{C}$
2. a) بين أن المعادلة $(z\in\mathbb{C}, P(z)=0)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $i\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) تحقق أنه $P(z)=(z-i\alpha)Q(z)$; $\forall z\in\mathbb{C}$

c) حل المعادلة $P(z)=0$; $z\in\mathbb{C}$

3. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر، نعتبر النقط $A(u)$ و $B(i)$ و $C(v)$

حيث $u=1+i(\sqrt{3}+1)$ و $v=4+i$

a. حدد الشكل المثلثي لكل من العددين $u-i$ و $u-v$

b. استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

تمرين -13-

لتكن (u_n) نعتبر المتتالية العددية حيث : $u_0=0$ و $u_{n+1}=2u_n+3^n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n\geq 0$ ، ثم ادرس رتابة المتتالية (u_n).

4- نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=3^n-u_n$

a- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

b- احسب v_n ثم u_n بدلالة n

c- احسب نهاية (u_n)

d- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+.....................+u_n$

تمرين -14-

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين بما يلي : $u_1=v_1=1$ و $3u_n-v_{n-1}=\dfrac{2-n}{n-1}$ و

$u_n-v_n=-1+\dfrac{1}{n}$

$\forall n\in\left(\mathbb{N}^*-\{-1\}\right)$

3) أ- احسب u_2 و v_2.

ب- بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$.

ج- احسب u_n ثم v_n بدلالة n من $\mathbb{N}^*$.

4) أ- باستعمال النتيجة : $3^{n-1}\geq n$ ، لكل n من $\mathbb{N}^*$، تحقق من أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n\leq\dfrac{1}{n}$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $1-\dfrac{1}{n}\leq v_n\leq 1$

ج- استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متقاربة وحدد نهايتها.

تمرين -15-

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+2} = \frac{1}{7}(8u_{n+1} - u_n) \end{cases}$

ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = u_{n+1} - u_n$

3) a- احسب u_2 و v_0.

b- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

4) a- احسب، بدلالة n، المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

b- استنتج أنه : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين -16-

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ ولكل n من $\mathbb{N}$: g^{-1} $u_{n+1} = \frac{9u_n + 9}{2u_n + 6}$

نقبل أن : $(\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 3)$ ونعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{2u_n + 3}{2u_n - 6}$

3- بين ان المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها العدد 4.

4- أ- حدد v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{6 \times 4^{n+1} - 15}{2 \times 4^{n+1} + 10}$

ج- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تمرين -17-

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بمل يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 - u_n^3}{7}} \end{cases}$ لكل n من $\mathbb{N}$ و $v_n = 8u_n^3 - 1$

1- a- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \prec u_n \prec 1$

b- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $-1 \prec v_n \prec 7$

2- a- احسب v_0.

b- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

3- a- احسب u_n بدلالة n.

b- استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين -18-

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1- احسب u_1.

2- أ- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \le u_n \prec 2\sqrt{3}$.
ب- بين أن (u_n) تزايدية قطعا.
ج- استنتج أن (u_n) متقاربة.
3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = 12 - u_n^2$ لكل n من $\mathbb{N}$.
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.
ب- احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين -19-

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $u_1 = \frac{7}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{7u_n+3}{3u_n+7}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1- أ- بين أن $u_n \ge 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
ب- بين أن (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة.
2- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية، ثم اكتب v_n بدلالة n.
ب- استنتج أن $u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين -20-

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $0 \le u_n \le 1$.
2- أ- بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية.
ب- استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة.
3- حدد نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

تمرين -21-

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n)^2$; لكل n من $\mathbb{N}$.

1- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.
2- أ- بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \ge \frac{5}{2}$
ب- استنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$; $u_n \ge 2 + \frac{5n}{2}$
ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n).

تمرين -22-

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{6u_n+4}{u_n+6}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1- بين أنه : $u_n \ge 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2- أدرس رتابة المتتالية (u_n).

3- نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a- بين أن (v_n) **متتالية هندسية أساسها** $\dfrac{1}{2}$

b- احسب v_n **و** u_n **بدلالة** n.

c- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$