ثانوية بئر أنزران ـ صفرو ـ
2009/2008 (الدّورة 1)

الإشتقاق و دراسة دوال عددية

الثّانية بكالوريا محاسبة 1 و 2
ذ: توفيق بنعمرو

014

أحسب مشتقّات الدوال التّالية:

$a(x)=5x^4-\frac{3}{2}x^7+\sqrt{2}\,x^3$

$b(x)=x^3-(3,2)x^2+4x+5$

$c(x)=\frac{4x^2+5x}{x^2+1}$

$d(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+5x}+7$

$e(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

$f(x)=\sqrt{5x^3-2x+4}$

$g(x)=(x+\frac{1}{x})^3$

$h(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+1}$

015

$f(x)=3x^2-4x+5$

1) حدّد معادلة مماس C_f في $A(2\,,9)$.
2) حدّد الدالة التآلفية مماسّة C_f في $B(1\,,4)$.
3) بيّن أنّ C_f يقبل مطراقاً في $\frac{2}{3}$ هو $\frac{11}{3}$.

016

$x\in[1\,,+\infty[$
$f(x)=2-x\sqrt{x-1}$

1) أدرس اشتقاق f في 1 على اليمين و أعط تأويلاً هندسياً.
2) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{-3x+2}{2\sqrt{x-1}}$, $x>1$.
3) بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية على مجالٍ J يتمّ تحديده
4) أحسب $f(2)$ و أحسب $(f^{-1})'(0)$.

017

لتكن $f(x)=|x^2-1|$

1) أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في 1
2) هل f قابلة للاشتقاق في العدد 1 ؟
3) حدّد معادلتي نصفي المماس ل (C_f) في 1

018

لتكن $x\in]2,+\infty[$; $f(x)=\frac{6x+1}{2x-4}$

1) أحسب $f'(x)$ و بيّن أنّ f تقبل دالة عكسية على مجالٍ J يتمّ تحديده.
2) حلّ في I المعادلة: $f(x)=\frac{19}{2}$ و أحسب $(f^{-1})'(\frac{19}{2})$.

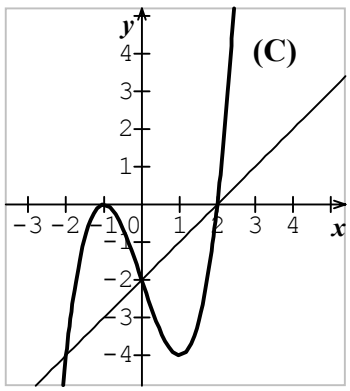
019

نعتبر الدالة f بحيث:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} & x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & x\geq 0 \end{cases}$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثمّ تحقّق أن f متّصلة في 0 .
2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و اليسار في 0 ثمّ أوّل النّتيجة.
3) أحسب $f'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

020

(بكالوريا وطنية 2007 / 2008 د ع) (C) التمثيل المبياني لدالة g معرّفة على $[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$



1) حدّد إشارة g على $[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$
2) حدّد القيمة الدنوية النسبية والقيمة القصوى النسبية للدالة g
3) حدّد تقاطع (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-2$.
4) حلّ في $[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$ المتراجحة $g(x)\geq x-2$.

021

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$

1) حدّد D_f و تحقّق أنّ: $f(x)=x-3+\frac{4}{x-3}$.
2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to(3)+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to(3)-}f(x)$.
3) بيّن أنّ المستقيم $y=x-3$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
4) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.
5) حدّد تقاطع C_f مع محور الأراتيب ثمّ أنشئ C_f .
6) لتكن g المعرّفة على $[5\,;+\infty[$ ب $g(x)=f(x)$. (وجدة 1998 / 1999)
أ) بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية محدّداً مجال تعريفها.
ب) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=\frac{13}{3}$ واستنتج $g^{-1}(\frac{13}{3})$ ثمّ أحسب $(g^{-1})'(\frac{13}{3})$.

022

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ و قابلة للاشتقاق عليه بحيث جدول التغيرات هو:

x	$-\infty$	-3		0		1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\|\|$ $+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					$\|\|$		-2		

1) حدّد حلول المعادلة $f(x)=0$.
2) حدّد حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$. (بكالوريا وطنية 2007 / 2008 د س)
3) حدّد صورة المجال $[0\,,2\,]$ بالدالة f .

023

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2) أحسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة. (فاس 2001 / 2002)
3) بيّن أنّ المستقيم $y=2x-3$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
4) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.
5) تحقّق أنّ: $2x^3-3x^2+1=(x-1)^2\cdot(2x+1)$ و استنتج تقاطع C_f و محور الأفاصيل.
6) أنشئ C_f نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.
7) لتكن g قصور f على $[1\,;0\,]$. بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية g^{-1} على مجال I يتمّ تحديده ثمّ أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

024

لتكن f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بحيث: $f(x)=2x-1+\frac{1}{2x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$.
2) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{4x^2-1}{2x^2}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.
3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
4) حدّد معادلة المستقيم (T) مماس C_f في 1 ثمّ أنشئ (Δ) و (T) و C_f .
5) لتكن g المعرّفة على $I=[\,0{,}5\,;+\infty[$ ب $g(x)=f(x)$. (مكناس 2000 / 2001)
بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يجب تحديده ثمّ حدّد $g^{-1}(x)$ لكلّ x من J .

بالتوفيق

025

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x^2\sqrt{2x+5}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. **(مكناس 2000 / 2001)**

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0=-\frac{5}{2}$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) أدرس الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$ و أنشئ C_f .

5) ناقش مبيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة $2x^5+5x^4-m^2=0$ في $[-\frac{5}{2},+\infty[$.

026

نعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{2}{(x+1)^2}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **(فرض محروس 2006 / 2007)**

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ المستقيم $y=0,5x-1$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{2(x+1)^3}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

5) أنشئ (C_f) ، معطيات: $f(0)=1$ و $f(-2)=0$.

6) لتكن g قصور f على $]-2,-1[$ بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجالٍ J يجب تحديده

7) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} ثمّ أحسب $(g^{-1})'(0)$.

027

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=x(\sqrt{x}-2)^2$.

1) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و اليسار في 0 .

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ أدرس الفرع اللانهائي ل C_f جوار $+\infty$.

3) أ) بيّن أنّ: $f'(x)=2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$ لكلّ x من $\mathbb{R}^{+*}$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيّرات.

4) بيّن أنّ C_f يقبل نقطة انعطاف ثمّ حدّ معادلة المماسّ له في هذه النّقطة.

5) أنشئ C_f .

6) لتكن g قصور f على $I=[4\,;+\infty[$.

بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية g^{-1} محدّداً مجموعة تعريفها ثمّ أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1}

028

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$ و $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. **(بني ملال 1997 / 1998)**

2) أ) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ثمّ بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{-x+1}{(x-1)^3}$

ب) أثبت أنّ $f'(x)\geq 0$ لكلّ $x\in[-1\,;1]$ ثمّ كوّن جدول التغيّرات.

3) أدرس الفروع اللانهائية ثمّ أنشئ C_f .

4) لتكن g المعرّفة على $I=[-2\,;0]$ ب $g(x)=f(x)$.

بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية من I نحو مجال J يجب تحديده ثمّ أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

029

تنتج مقاولة كمّيات كبيرة من منتوج ما. الكلفة الإجمالية لإنتاج q وحدة بالدّرهم يعبّر عنها ب: $C(q)=20q+3\sqrt{q}+200$ حيث $q>0$.

1) بيّن أنّ الكلفة المتوسّطة لوحدة بالدرهم هي: $C_M(q)=20+\frac{3}{\sqrt{q}}+\frac{200}{q}$.

2) أحسب $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q)$ و أوّل النتيجة هندسياً ثمّ اقتصادياً.

030

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$

1) بيّن أنّ حيّز تعريف الدالة f هو $D=[0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$. **(مراكش 2000/1999)**

2) بيّن أنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) **أ)** أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أوّل هندسياً النّتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}$ و أوّل هندسياً النّتيجة.

بالتوفيق

4) أ) أحسب $f'(x)$ لكلّ x من $D-\{0\}$.

ب) بيّن أنّ: $\forall x\in D-\{0\}: f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$ و حدّد جدول التغيرات.

5) أنشئ C_f ، نقبل أنّ $I(9,\frac{9}{2})$ نقطة لنعطاف.

6) لتكن g قصور f على $J=[4,+\infty[$ ، بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية من J نحو J . و حدّد $g^{-1}(x)$ لكلّ x من J .

031

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

1) حدّد D_f و أحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$. **(فـاس 2001 / 2002)**

2) بيّن أنّ $\lim\limits_{-\infty} f(x)=0$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ المستقيم $y=2x$ مقارب مائل ل C_f بجوار $+\infty$.

4) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

5) أحسب $f'(x)$ و تحقّق أنّ $\forall x<-1: f'(x)<0$ و $\forall x\in]1,+\infty[: f'(x)>0$.

6) ضع جدول التغيّرات و أنشئ C_f .

7) لتكن g قصور f على $]-\infty,-1]$.بيّن أنّ g تقبل دالة عكسية على مجال J يتمّ تحديده.

8) حدّد $g^{-1}(x)$ ثمّ أنشئ $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم و بلون مغاير.

032

أثبتت دراسة إحصائية أنّه يمكن التّعبير رياضياً عن تطوّر ساكنة مدينة منذ 1960 بالدالة $f(t)=\frac{3(t+10)^2}{t^2+400}$ ، حيث $f(t)$ عدد السكان بالملايين سنة $1960+t$.

نقبل أنّ وثيرة النموّ في اللحظة t يعبّر عنها ب $f'(t)$.

1) في أية سنة تجاوزت ساكنة هذه المدينة 3 ملايين نسمة.

2) أحسب $f'(t)$ ثمّ استنتج السنة التي تكون فيها ساكنة هذه المدينة قصوية وحدّد عدد السكان.

3) أحسب وثيرة النمو في سنة 1975 ثمّ وثيرة النمو المنتظرة سنة 2015.

4) أحسب $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ ثمّ أعط تأويلاً إحصائياً لهذه النّتيجة.