الاشتقـــــاق ذ الرقبة

I- الاشتقـاق في نقطـة :

أنشطـة :

1- حدد العدد المشتق للدالة f في x_0 في الحالات التالية :

a- $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad x_0=1$

لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(1+x)}{x^2}$$

$$=-2$$

إذن العدد المشتق للدالة f في $x_0=1$ هو -2 .

ونكتب $f'(1)=-2$

b- $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad x_0=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2- أدرس قابلية اشتقاق f في x_0 في الحالات التالية :

a- $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ $\qquad x_0=1$

لدينا :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & x\prec1 \text{ أو } x\succ2\\ -x^2+3x-2 & 1\le x\le2\end{cases}$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to1\\1\prec x}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}-(x-2)$$

$$= 1$$

ونكتب : $f'_d(1) = 1$

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} x - 2 = -1$$

ومنه : $f'_g(1) = -1$

بما أن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

فإن : f غير قابلة للاشتقاق في **1** .

b- $f(x) = \begin{cases} \tan x & ; \quad 0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & ; \quad \dfrac{-\pi}{2} \prec x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$$

إذن : $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$

إذن : f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

و $f'(0) = 1$.

c- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \\ x + 1 & ; \quad x \prec 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \prec 1}} x + 1 = 2$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \succ 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1$$

إذن : f غير متصلة في **1** .

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق في **1** .

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (ℓ_f) الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم في النقطة ذات الأفصول x_0 .

a- $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ $\qquad x_0 = 0$

لدينا : $f(0) = 1$

و : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+1-1}{x\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^3+1}+1\right)}$$

$$= 0 = f'(0)$$

وبما أن معادلة المماس لـ (ℓ_f) في **0** هـي :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

فإن معادلة المماس في **0** هــي :

$$y = 1$$

b- $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $x_0=1$

لدينا : $f(1)=1$

لدينا :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$$

إذن : $f'(1)=\frac{1}{3}$

ومنه معادلة المماس هــي :

$$y = \frac{1}{3}(x-1)+1$$

$$y = \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

خلاصــة :

1- الاشتقاق في نقطة :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0،
نقول أن : f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$$

ونكتب : $f'(x_0)=l$

العدد $f'(x_0)$ يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0.

2- الاشتقاق على اليمين :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $[x_0 , x_0+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

ونكتب : $f'_d(x_0)=l$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في x_0.

3- الاشتقاق على اليسار :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $]x_0-\alpha\ ,\ x_0]$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x_0\succ x}} \frac{f(x)\ -\ f(x_0)}{x\ -\ x_0} = l \in \mathbb{R}$$

ونكتب : $f'_g(x_0)=l$

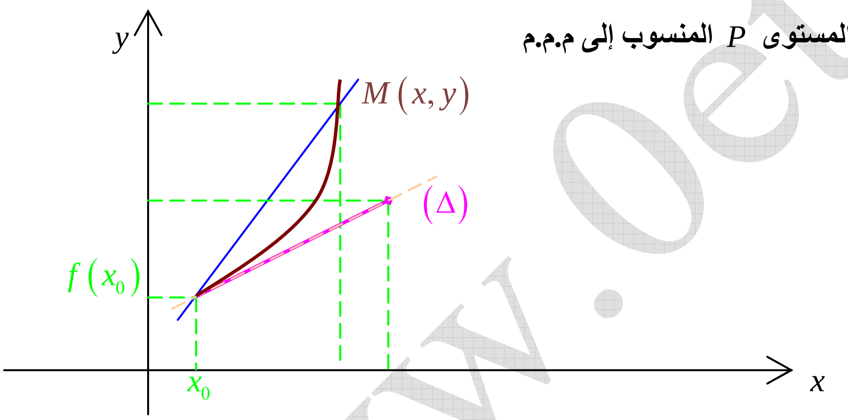
العدد $f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في x_0.

خاصيـة :

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين وقابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

4- التأويل الهندسي :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب إلى م.م.م و $M_0(x_0\ ,\ f(x_0))$.



لدينا : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ هو ميل المستقيم (MM_0).

عندما تقترب M مـن M_0.

فإن المستقيم (M_0M) يقترب من (Δ).

إذن : ميل المستقيم (Δ) هـو

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

إذن : معادلة (Δ) تكون على شكل :

$$y\ =\ f'(x_0)x\ +\ p$$

وبما أن : $M_0(x_0\ ,\ f(x_0))\ \in\ (\Delta)$

فإن : $f(x_0)= f'(x_0)\ x_0\ +\ p$

إذن : $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

ومنه : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

أو :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

وهذه هي معادلة المماس لـ (ℓ_f) في $M_0(x_0\ ,\ f(x_0))$.

نصف مماس لمنحنى دالــة :

1- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين .

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليمين هي :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ \qquad x \geq x_0 \end{cases}$$

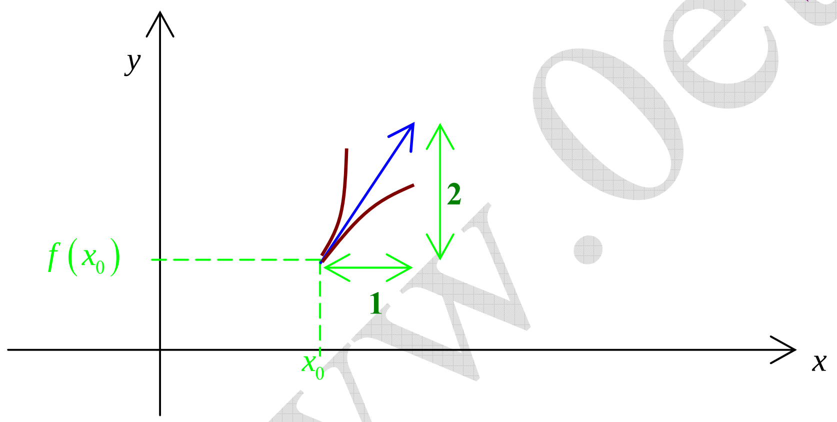
2- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار.

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليسار هي :

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ \qquad x \leq x_0 \end{cases}$$

أمثلــة :

1- $f(x_0)=1$ و $f'_d(x_0)=2$



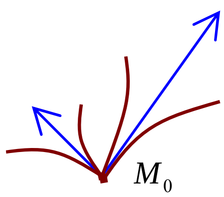
2- $f'_d(x_0)=-2$

$f'_g(x_0)=\frac{3}{2}$

$f'_g(x_0)=-2$

$f'_g(x_0)=-1$; $f'_d(x_0)=1$

$f'_g(x_0)=-1$ $\qquad$ $f'_d(x_0)=2$

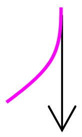
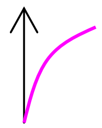
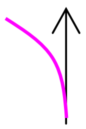
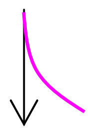
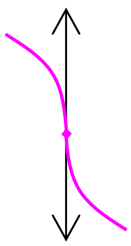
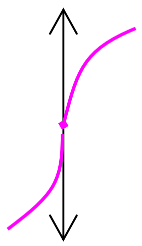


نصف مماس مواز لمحور الأراتيب

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

أو : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب في x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ 	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ 

II- الدالــة المشتقــة :

حدد الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية :

-1 $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$

-2 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

-3 $f(x) = |x^2-1|$

-4 $f(x) = \tan^5(x)$

تصحيح :

-1 لدينا : $f'(x) = \left[(x^2+1)\sqrt{x}\right]'$

$$= \left(x^2+1\right)' \sqrt{x} + \left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$= 2x\sqrt{x} + \left(x^2+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x\sqrt{x} + \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x}}{2x}$$

-2 لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

إذن :

$$f'(x) = \frac{x'\left(x^2+1\right) - x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2+1 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

-3

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \; x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ 1-x^2 & ; \; -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

إذن :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \; x \prec -1 \text{ أو } x \succ 1 \\ -2x & ; \; -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

-4 $f(x) = \tan^5(x)$

$$f'(x) = 5\tan^4(x)\left(\tan(x)\right)'$$

$$= 5\tan^4 x\left(1 + \tan^2(x)\right)$$

$$= \frac{5\tan^4 x}{\cos^2(x)}$$

خلاصة :

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k \cdot u' \; / \; k \in \mathbb{R}$$

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u' \; / \; n \in \mathbb{N}$$

جدول مشتقات الدوال الاعتيادية :

الدالــة f	الدالــة f'	ملاحظـات
a	0	$a\in\mathbb{R}$
$ax+b$	a	
x	1	
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$n\in\mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x\neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\succ 0$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)'}$	$x\neq\frac{-d}{c}$
$\cos(x)$	$-\sin x$	
$\sin(x)$	$\cos x$	
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$	

الاشتقاق على مجــال :

- نقول أن f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال I.
- إذا كان حيز تعريف الدالة يحتوي على مجال من نوع $[x_0\ ,\ x_0+\alpha[$

وكان : $D_f\ =\ ]x_0-\alpha\ ,\ x_0+\alpha[\ =\ [x_0\ ,\ x_0+\alpha[$

و f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين فإننا نقول أن : f قابلة للاشتقاق في x_0.

ونكتب : $f'(x_0)=f'_d(x_0)$

المشتقات المتتاليــة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I، فإن دالتها المشتقة f' تكون معرفة على I.
وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I ، فإن دالتها المشتقة تسمى المشتقة الثانية للدالة f' وتكتب f'' أو $f^{(2)}$.
وبصفة عامة : $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$

ملاحظـة :

إذا وجدت $f^{(n)}$ وكانت معرفة على I ، نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على I.

III- التقريب المحلي لدالة بدالــة تآلفيــة :

مثـــال : $f(x)=(1+2x)^3$

لدينا : $f'(x) = 3(1+2x)^2 \cdot 2$

$= 6(1+2x)^2$

إذن : $f'(0) = 6$

ولدينا : $f(0) = 1$

ولدينا : $f(x) = 1 + 3(2x) + 3(2x)^2 + (2x)^3$

$= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

$= 1 + 6x + x(12x + 8x^2)$

$= f(0) + f'(0)(x-0) + (x-0)(12x + 8x^2)$

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 0} 12x + 8x^2 = 0$

إذن : عندما تكون x **قريبة من 0 .**

فإن : قيمة $12x + 8x^2$ **تكون مهملة .**

إذن : بجوار صفر $f(x) \simeq 1 + 6x$.

نضع : $u(x) = 1 + 6x$.

الدالة u **تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة** f **في** $x_0 = 0$.

خاصية وتعريـــف :

لتكن f **دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه** x_0 (I).

تكون f **قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا وجدت دالة** f **معرفة على مجال مفتوح مركزه** x_0 **بحيث** $\forall x \in I$.

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)(x-x_0) \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

مع : $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$

الدالة u **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ :**

$$u(x) = ax+b$$

$$u(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f **في** x_0.

ملاحظـة :

المنحنى الممثل للدالة u **هو المماس لـ** (ℓ_f) **في النقطة ذات الأفصول** x_0.

IV- مشتقة الدالة العكسيــة :

1- مشتقة دالة مركبة :

تمهيـد :

لدينا : $f'(x) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$

إذن : $fog(x) = \dfrac{d\,\left(fog(x)\right)}{dx}$

نضع : $g(x)=y$

إذن :
$$fog(x) = \frac{d\,f(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{d\,(f(y))}{dy} \cdot \frac{d(g(x))}{dx}$$
$$= f'(y) \cdot g'(x)$$
$$= f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبالتالي :

$$\boxed{(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)}$$
$$\boxed{(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)}$$

خاصيــة :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ، $x_0 \in I$ و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0) = y_0$.
  فإن : gof قابلة للاشتقاق في x_0.
  ولدينا : $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على J .
  فإن : gof قابلة للاشتقاق على I.
  ولدينا : $\forall x \in I \quad ; \quad (gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

تطبيقــات :

أحسب مشتقة الدوال التالية :

-1 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f'(x) = \cos'\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)'$
$$= -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

-2 $f(x) = \cos(ax+b) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\cos'(ax+b) \cdot (ax+b)'$
$$= -a\,\sin(ax+b)$$

-3 $g(x) = f(ax+b)$
$$g'(x) = f'(ax+b) \cdot (ax+b)'$$
$$= a \cdot f'(ax+b)$$

-4 $f(x) = \sqrt{v(x)}$

نضع : $u(x) = \sqrt{x}$

إذن : $f(x) = uov(x)$

وبما أن : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

و :
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(v(x)) \times v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \times v'(x) \\ &= \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} \end{aligned}$$

مشتقة الدالة العكسيــة :

تمهيـد :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على J. و $f(I) = J$.

لدينا : f تقابل من I نحو J.

ولتكن : f^{-1} التقابل العكسي للدالة f.

لدينا : $\forall x \in J \; ; \; f\, o\, f^{-1}(x) = x$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و f^{-1} قابلة للاشتقاق على J.

فإن : $\forall x \in J \; ; \; \left(f\, o\, f^{-1}\right)'(x) = 1$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)' \times \left(f^{(-1)}\right)'(x) = 1$$

إذن : $\forall x \in J \; ; \; \left(f^{(-1)}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

ملاحظــة :

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \; ; \; f(x_0) = y_0$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

خاصيــة :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I.

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ ، $x_0 \in I$.
  فإن : الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$.
  ولدينا : $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في I،
  فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على : $f'(I) = J$.
  ولكل x من I لدينا :
  $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

تطبيقــات :

1 : مشتقة دالة الجذر من الدرجة n.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x) = x^n$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

و : $f'(x) = n\,x^{n-1}$

ولدينا :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

إذن : $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$

ملاحظة :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n\,x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

خلاصة :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

مثال :

-1 $f(x) = \sqrt{x}$
$= x^{\frac{1}{2}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;;\; f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2\,x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

-2 $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;;\; f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\,x^{\frac{-2}{3}}$$
$$= \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

استنتاج :

-a $\forall r \in \mathbb{Q}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (x^r)' = r\,x^{r-1}$

-b لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I .

ولكل x من I ، $f(x) \succ 0$ و $r \in \mathbb{Q}$.

$$\left(f^r\right)' = r\, f^{r-1}(x) \times f'(x)$$

أمثلــــة :

-1 $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}$

$$= \left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x)$$

$$= \frac{4x}{3\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}}$$

-2 $f(x) = \left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;;\; f'(x) = 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

-3 $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+x+1}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

-4 $f(x) = x^2\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}$

$$f'(x) = 2x\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + x^2\,\frac{\frac{-3}{(2x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}}$$

تذكير

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$