

ملخص دروس السنة الثانية بكالوريا علوم تجريبية

ثانوية ابن تومرت - مراكش

تقديم : ذ. العربي الوظيفي

الصفحة	الدرس
<u>2</u>	<u>الأعداد العقدية</u>
<u>5</u>	<u>الهندسة الفضائية</u>
<u>7</u>	<u>المتتاليات العددية</u>
<u>8</u>	<u>اتصال دالة عددية</u>
<u>9</u>	<u>الإشتقاق</u>
<u>11</u>	<u>جدول الفروع النهائية</u>
<u>12</u>	<u>الدوال اللوغاريتمية والأسية</u>
<u>13</u>	<u>الدوال الأصلية</u>
<u>14</u>	<u>حساب التكامل</u>
<u>15</u>	<u>حساب الإحتمال</u>
<u>17</u>	<u>المعادلات التفاضلية</u>

الأعداد العقدية

ع 2

تعريف : (المرافق)

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا حيث x و y عددا حقيقيان .
العدد العقدي $x - iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له بالرمز \bar{z}

خاصية : (المرافق والعمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين .



$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0) \\ \overline{z^n} &= (\overline{z})^n \quad \text{حيث } z \in C^* \text{ و } n \in Z \end{aligned}$$

تعريف : (المعيار)

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا مع $(a, b) \in R^2$

العدد الحقيقي $\sqrt{a^2 + b^2}$ يسمى معيار العدد z ونرمز له بالرمز $|z|$

ملاحظة :

ليكن z عدد عقديا و M صورته في المستوى العقدي : لدينا $OM = |z|$

لنكن A و B نقطتين احاطها على التوالي z_A و z_B لدينا: $AB = |z_B - z_A|$

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}}$$

خاصية : (المعيار والعمليات)

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{حيث } z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{حيث } z \in C^* \text{ و } n \in Z$$

تعريف : (العمدة)

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته $(O \neq M)$

المتجهتان \vec{e}_1 و \vec{OM} الغير منعدمتين تحددان زاوية موجبة

كل قياس للزاوية (\vec{e}_1, \vec{OM}) نسميه عمدة العدد z ونرمز له

ب $\arg(z)$

$$\text{ولدينا } \arg(z) \equiv (\vec{e}_1, \vec{OM}) [2\pi]$$

خاصية : (العمدة والعمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

$$\arg(\bar{z}_1) \equiv -\arg(z_1) [2\pi]$$

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi] \quad \text{حيث } z \in C^* \text{ و } n \in Z$$

1. مجموعة الأعداد العقدية :

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز C و تحقق :

$$R \subset C$$

العمليات الجبرية في C هي امتداد للعمليات في R .

تحتوي على عدد غير حقيقي يكتب i و يحقق $i^2 = -1$.

كل عنصر z من C يكتب بكيفية وحيدة على شكل :

$$z = a + ib \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ من } R$$

مصطلحات :

كل عنصر من C يسمى عدد عقدي .

المجموعة C تسمى مجموعة الأعداد العقدية .

الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z .

العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ورمزه $a = \text{Re}(z)$.

العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ورمزه $b = \text{Im}(z)$.

خاصية : (الشكل الجبري والعمليات في مجموعة الأعداد العقدية)

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

2. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى المزود بمعلم M م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ يسمى المستوى العقدي

تعريف : (اللحن و الصورة)

نعتبر عددا عقديا $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in R^2$.

النقطة $M(a, b)$ تسمى صورة العدد z ونرمز لها بالرمز $M(z)$.

العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحن $M(a, b)$ و يكتب z_M .

المتجهة $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ تسمى المتجهة الصورة للعدد z ونرمز لها

بالرمز $\vec{u}(z)$.

العدد العقدي $z = a + ib$ يسمى لحن المتجهة \vec{u} ونرمز له ب $z_{\vec{u}}$.

خاصية : (اللحن و العمليات)

لحن نقطة M هو لحن المتجهة \vec{OM}

$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_B - \vec{z}_A$$

$$\vec{z}_{u+v} = \vec{z}_u + \vec{z}_v$$

$$\vec{z}_u = \vec{z}_v \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

لحن المتجهة $\alpha \vec{u}$ هو $\alpha \vec{z}_u$



الأعداد العقدية

2 ع ت

خاصية: (قياس الزوايا)

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى الحاقها على التوالي :

$$z_D \text{ و } z_C \text{ و } z_B \text{ و } z_A$$

$$O \neq A \text{ حيث } (\vec{e}_1, \vec{OA}) \equiv \arg(z_A) [2\pi].$$

$$A \neq B \text{ حيث } (\vec{e}_1, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

$$A \neq C \text{ و } A \neq B \text{ حيث } (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

$$D \neq C \text{ و } A \neq B \text{ حيث } (\vec{AB}, \vec{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

3. الشكل المثلثي :

خاصية : (الشكل المثلثي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ حيث } |z| = r \text{ و } \arg(z) \equiv \theta [2\pi].$$

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل المثلثي.

ترميز :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ بالرمز } [r, \theta].$$

خاصية : (العلاقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي)

$$z = a + ib = [r, \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

خاصية : (الشكل المثلثي و العمليات)

ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعاً و θ و θ' عددين حقيقيين

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] \text{ و } [r, \theta] = [r, -\theta].$$

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'].$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right].$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta] \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}.$$

خاصية : (صيغة موافر)

لكل n من \mathbb{N} و θ من \mathbb{R} لدينا :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

4. الترميز الاسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف : (الرمز $e^{i\theta}$)لكل عدد حقيقي θ نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ للعدد العقدي $[\cos\theta + i\sin\theta]$.

خاصية : (الترميز الاسي والعمليات)

ليكن α و θ عددين حقيقيين

$$e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}.$$

خاصية : (الترميز الاسي لعدد عقدي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل : $z = re^{i\theta}$ حيث

$$|z| = r \text{ و } \arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل الاسي.

تعريف : (صيغتا اولير)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ لكل عدد حقيقي } \theta \text{ الصيغتان:}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ و}$$

تسميان صيغتا اولير

5. المعادلات من الدرجة الثانية :

خاصية : (المعادلات من الدرجة الثانية)

 S مجموعة حلول المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم. مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$

$$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta > 0 \text{ فان .}$$

$$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta = 0 \text{ فان .}$$

$$S = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\} \text{ اذا كان } \Delta < 0 \text{ فان .}$$

خاصية : (العلاقة بين المعاملات والجذور)

ليكن z_1 و z_2 حلي للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ لدينا}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$



الأعداد العقدية

2 ع ت

الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k هي :

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ هي :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

علاقات في الحساب المثلثي:

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$

$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

x بالراديان	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	غير معرف
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	-1	0	0
2π	1	0	0

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\tan(x + 2\pi) = \tan x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

6. تطبيقات هندسية للأعداد العقدية :

خاصية : (الاستقامة - التوازي - التعامد - التداور)

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة منى منى .

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \text{ تكون } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة اذا فقط اذا كان}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \text{ يكافئ } (AB) \parallel (DC) .$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \text{ } [\pi] \text{ يكافئ}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ يكافئ } (AB) \perp (DC) .$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi] \text{ يكافئ}$$

$$\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \cdot \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R} \text{ النقطة } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } D \text{ متداورة يكافئ}$$

خاصية : ... طبيعة مثلث



$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ يكافئ } A \text{ مثلث قائم الزاوية في } A$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ يكافئ } A \text{ مثلث متساوي الساقين في } A$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i \text{ يكافئ } A \text{ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في } A$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] \text{ يكافئ } ABC \text{ متساوي الأضلاع يكافئ}$$

خاصية : ... طبيعة رباعي

$$z_B - z_A = z_C - z_D \text{ يكافئ } ABCD \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$(AB) \perp (AD) \text{ يكافئ } ABCD \text{ مستطيل}$$

$$(AC) \perp (BD) \text{ يكافئ } ABCD \text{ متوازي الأضلاع}$$

$$AB = AC \text{ يكافئ } ABCD \text{ مستطيل و } AB = AC$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \pm i \text{ و } z_B - z_A = z_C - z_D \text{ يكافئ}$$

خاصية : ... التحويلات الإعتيادية

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$.

الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة \vec{u} هي : $z' = z + z_u$

الهندسة الفضائية

2 عت

7. الفلكة :

a. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً.
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمزها بالرمز : $S(\Omega, r)$.
ولدينا : $M \in S \Leftrightarrow \Omega M = r$

b. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركز وشعاع :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ وشعاعها r هي
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

c. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن S فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة في الفضاء.
 $M \in S \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$
 $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$

d. دراسة مجموعة النقط التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

باستعمال المتساوية $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ نجد أن :

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \alpha \quad \text{تكافئ}$$

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d \quad \text{مع}$$

نفضل بين 3 حالات :

إذا كان $\alpha < 0$ فإن E مجموعة فارغة .

إذا كان $\alpha = 0$ فإن E هي الأحادية $\left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$.

إذا كان $\alpha > 0$ فإن E فلكة مركزه $\Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right)$ وشعاعها $\sqrt{\alpha}$.

e. الوضع النسبي لفلكة ومستقيم :

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (D) مستقيماً في الفضاء
ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D)
نضع : $d = d(\Omega, (D))$

إذا كان $d > r$ فإن الفلكة والمستقيم لا يتقاطعان

نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة $S(\Omega, r)$

إذا كان $d = r$ فإن المستقيم مماس للفلكة في النقطة H . يتم تحديد

مثلث إحداثياتها محل نظمة مكونة من تمثيل بارامترى للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نعتبر الفضاء منسوباً إلى M, m, m, m $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. الجداء السلمي لمتجهتين :

a. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نتيجة : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

b. منظم متجهة :

منظم متجهة $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ هو العدد الحقيقي الموجب :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

c. المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين A و B هي :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

d. متجهة منظمية على مستوى :

نسمى متجهة منظمية على مستوى P ، كل متجهة غير منعومة اتجاهها عمودي على المستوى P .

نتيجة :

متجهة منظمية على مستوى معرف بمعادلة $ax + by + cz + d = 0$
هي $\vec{n}(a, b, c)$.

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على مستوى يكون موجهاً بمنظمة على هذا المستوى .
تمثيل بارامترى للمستقيم المار من نقطة Ω والعمودي على المستوى P
المعرف بالمعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هو :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

e. تحديد معادلة ديكارتية لمستوى مار بنقطة و متجهة منظمية عليه :

لتكن A نقطة و \vec{n} متجهة غير منعومة .

يوجد مستوى وحيد P مار من A و \vec{n} منظمية عليه ولدينا :

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overline{AM} = 0$$

f. تحديد مثلث إحداثيات المسقط العمودي لنقطة على مستوى :

مسقط نقطة Ω على مستوى P هو نقطة تقاطع P مع المستقيم (Δ)
المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى P . ويتم تحديد مثلث
إحداثياتها محل نظمة مكونة من تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) ومعادلة
ديكارتية للمستوى .

الهندسة الفضائية

2 ع ت

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجهًا بالمتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

d. مساحة مثلث:

$$S_{ABC} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} \quad \text{مساحة مثلث } ABC \text{ هي:}$$

e. مساحة متوازي الأضلاع:

$$S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad \text{مساحة متوازي الأضلاع } ABCD \text{ هي:}$$

d. مسافة نقطة عن مستقيم:

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة \vec{u} هي

$$d(\Omega; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

e. توازي وتعامد مستويين:

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منتظمة على (P) المتجهة $\vec{n}(a',b',c')$ منتظمة على (P') $(P) \parallel (P')$. يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ (جداً متجهي) $(P) \perp (P')$. يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ (جداً سلمي)

f. تقاطع مستويين:

نعتبر مستويين متقاطعين (P) و (P') .لكن \vec{n} متجهة منتظمة على (P) و \vec{n}' متجهة منتظمة على (P') تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ . إذا كان $d < r$ فإنه يكون للفلكة والمستقيم نقطتان مشتركتان، يتم

تحديد متلوتي إحداثياتهما محل أنظمة مكونة من تمثيل بارامتري

للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نقول إن المستقيم يخترق الفلكة

f. الوضع النسبي لفلكة ومستوى:

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من الفضاءمعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$.ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P) .

$$d = (\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{نضع:}$$

. إذا كان $d > r$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين $S(\Omega, r)$ و (P) .إذا كان $d = r$ فإن (P) و $S(\Omega, r)$ نقطة وحيدة مشتركة وهي H نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة $S(\Omega, r)$ في H . إذا كان $d < r$ فإن تقاطع $S(\Omega, r)$ و (P) هو الدائرة التي مركزها

$$H \text{ وشعاعها } r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

ملحوظة 1: إذا كان $d = 0$ أي $\Omega \in (P)$ فإن (P) يقطع $S(\Omega, r)$ وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r .ملحوظة 2: يتم تحديد متلوث إحداثيات النقطة H محل أنظمة مكونة من معادلةديكارتية للمستوى و تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ، المار من Ω والعمودي

على المستوى .

3. الجداء المتجهي:

a. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي:

$$\vec{v} = x'i + y'j + z'k \quad \text{و} \quad \vec{u} = xi + yj + zk \quad \text{إذا كان}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y & z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x & z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x & y \end{vmatrix} k \quad \text{فإن:}$$

b. استقامية متجهتين:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \text{يكافئ} \quad \vec{u} \quad \text{و} \quad \vec{v} \quad \text{مستقيمتان}$$

c. استقامية ثلاث نقط:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{B} \quad \text{و} \quad \vec{A} \quad \text{و} \quad \vec{C} \quad \text{مستقيمية يكافئ}$$

نتيجة: منتظمة على مستوى (ABC) لنكن \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} نقطاً غير مستقيمية .المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC)

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

ولدينا التكافؤ التالي: $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$ الذي نستنتج منه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

المتتاليات العددية

2 ع ت

1. تعريف متتالية :

ليكن n_0 عددا طبيعيا .

عندما نربط كل عدد صحيح طبيعي $n_0 \leq n$ بعدد حقيقي وحيد u_n

نقول إننا عرفنا متتالية عددية نرمز لها بالرمز $(u_n)_{n \geq n_0}$ أو (u_n) .

العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$.

العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$.

تعريف: متتالية مكبورة - مصغورة - محدودة

$(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة بالعدد M يكافئ $u_n \leq M$ لكل $n_0 \leq n$.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ مصغورة بالعدد m يكافئ $u_n \geq m$ لكل $n_0 \leq n$.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ محدودة يكافئ أنها مكبورة ومصغورة

يكافئ وجود عدد حقيقي موجب α حيث $|u_n| \leq \alpha$ لكل $n_0 \leq n$

رتابة متتالية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ تزايدية يكافئ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ لكل $n_0 \leq n$.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ تناقصية يكافئ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل $n_0 \leq n$.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة يكافئ $u_{n+1} = u_n$ لكل $n_0 \leq n$.

كل متتالية تزايدية تكون مصغورة بعدها الأول .

كل متتالية تناقصية تكون مكبورة بعدها الأول .

المتتالية الحسابية

نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r ، غير مرتبط

بالعدد n ، حيث $u_{n+1} - u_n = r$ لكل $n_0 \leq n$.

صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ لكل $n_0 \leq n$.

العلاقة بين حدين : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n_0 \leq p$ و $n_0 \leq n$.

صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0; +\infty[$ حيث $p \leq n$.

المتتالية الهندسية :

نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q ، غير مرتبط

بالعدد n ، حيث $u_{n+1} = q u_n$ لكل $n_0 \leq n$.

صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} q^{(n-n_0)}$ لكل $n_0 \leq n$.

العلاقة بين حدين : $u_n = u_p q^{(n-p)}$ لكل $n_0 \leq p$ و $n_0 \leq n$.

صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

مع $q \neq 1$ لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0; +\infty[$ حيث $p \leq n$.

نهاية متتالية :

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي عدد حقيقي l إذا كان كل مجال

مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .

نقول إن نهاية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $(+\infty)$ إذا كان كل مجال من النوع

$[a; +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة

تقارب متتالية :

نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية .

كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة .

مصاديق تقارب متتالية :

كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة .

كل متتالية تناقصية ومصغورة تكون متقاربة .

إذا كان : $v_n < u_n < w_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0

و $\lim v_n = \lim w_n = l \in \mathbb{R}$

فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون متقاربة و $\lim u_n = l$

إذا كان : $|u_n - l| < v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = 0$

فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و $\lim u_n = l$.

إذا كان : $u_n < v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = -\infty$

فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = -\infty$

إذا كان : $v_n < u_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = +\infty$

فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = +\infty$

تقارب المتتالية ذات الحد العام a^n حيث $a \in \mathbb{R}$:

إذا كان $-1 < a < 1$ فإن $\lim a^n = 0$.

إذا كان $a = 1$ فإن $\lim a^n = 1$.

إذا كان $a > 1$ فإن $\lim a^n = +\infty$.

إذا كان $a \leq -1$ فإن : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية .

تقارب المتتالية ذات الحد العام : n^r حيث $r \in \mathbb{Q}^*$:

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_n n^r = +\infty$

إذا كان $r < 0$: فإن $\lim_n n^r = 0$

نهاية متتالية ترجعية :

لتكن f دالة متصلة على مجال I بحيث : $f(I) \subset I$ و u_0 عنصرا من I .

نعتبر المتتالية المعرفة بعدها الأول u_0 وبالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق أن $f(l) = l$.

نهاية المتتالية : $v_n = f(u_n)$

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة نحو عددا l و f دالة متصلة في l

فإن المتتالية (v_n) تكون متقاربة نحو $f(l)$

اتصال دالة

2 ع ت

نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $f(a).f(b) < 0$ فإن
المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]a, b[$.

وإذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على $[a, b]$ فإن الحل يكون وحيداً

6. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً :

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية
معرفة على المجال $J = f(I)$ ولدينا التكافؤ التالي :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على I فإن :

. دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس تغيرات f
. منحني f و f^{-1} متماثلان م م م بالنسبة للمنصف الأول

7. تعريف دالة الجذر من الرتبة n :

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم .
الدالة العكسية لقصور الدالة $x \rightarrow x^n$ على R^+ يسمى دالة الجذر من
الرتبة n

خصائص :

. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ معرفة على R^+ وتأخذ قيمها في R^+

. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعاً على R^+

$$\begin{cases} y = x^n \\ x \in R^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in R^+ \end{cases}$$

$$\forall x \in R^+, (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{***} \quad \forall x \in R^+, \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\forall x \in R^+) (\forall y \in R^+) : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$(\forall x \in R^+) (\forall y \in R^+) : \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

$$\forall x \geq 0 : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{m^m x^m} \quad \text{****} \quad \sqrt[n]{m^m x^m} = m \sqrt[n]{x}$$

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$\forall x \geq 0, \forall y > 0 : \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y > 0)$$

+ إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً :

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً قطعاً و r عدداً جذرياً غير منعدم

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ويكتب $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ حيث :

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{مع } p \in Z^* \text{ و } q \in N^*$$

خصائص : لكل a و b و r و r' و r و r' من Q^* لدينا :

$$a^r . a^{r'} = a^{r+r'} \quad , \quad (ab)^r = a^r b^r \quad ; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \quad ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

1. اتصال دالة :

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0
نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. الاتصال على مجال :

- تكون دالة متصلة على مجال $]a, b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة منه

- تكون دالة متصلة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a, b[$ ، على
اليمين في a وعلى اليسار في b .

خصائص :

- كل دالة حدودية متصلة على R

- كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

- الدالتان $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \sin x$ متصلتان على R

- الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ متصلة على $[0, +\infty[$.

- الدالة $x \rightarrow \tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها وهي $D = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$

3. العمليات على الدوال المتصلة :

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين في عدد x_0

فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و $\alpha.f$ حيث α عدد حقيقي متصلة في x_0

- وإذا كان $g(x_0) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ دالتان متصلتان في x_0

4. اتصال مركبة دالتين :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J حيث

$$I \subset J \text{ و } x_0 \text{ عنصراً من } I$$

إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$

فإن الدالة $g \circ f$ تكون متصلة في x_0 .

نتيجة : إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال مفتوح مركزه x_0

فإن \sqrt{f} دالة متصلة في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عديدة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و g دالة معرفة

على مجال J بحيث $f(I) \subset J$

إذا كان : $\lim_{x_0} f(x) = l$ و g متصلة في l

فإن : $\lim_{x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$



5. مبرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و λ عدداً حقيقياً

محصوراً بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد c

من $[a, b]$ حيث : $f(c) = \lambda$

الإشتقاق

2 عت

1. قابلية اشتقاق دالة في عدد

إذا كان: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في a ومنحناها يقبل نصف مماس مواز لمحور الأرتاب .
إذا كان $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في a ومنحناها يقبل نصف مماس ليس لهما نفس الحامل .
في هذه الحالة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة

تأويلات هندسية



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

0

 $l \in \mathbb{R}^*$ $+\infty$

f ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس أفقي على اليمين $M(a, f(a))$

f ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس مائل على اليمين $M(a, f(a))$

f غير ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس عمودي على اليمين النقطة في $M(a, f(a))$

ج. مشتقة المركبة . مشتقة الدالة العكسية :

خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.
إذا كانت الدالة f ق ش في a و الدالة g ق ش في $f(a)$ فإن : $g \circ f$ ق ش في a و لدينا :
 $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.
إذا كانت الدالة f ق ش على I و الدالة g ق ش على J فإن $g \circ f$ ق ش على I ولكل x من I :
 $(g \circ f)(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I .
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في عدد a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $b = f(a)$ و لدينا $f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد a .

نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا كان : $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a , ويكتب $f'(a)$.
وفي هذه الحالة لدينا : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

2- قابلية اشتقاق دالة على اليمين و على اليسار في عدد :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[a, a + \epsilon[$ حيث $\epsilon > 0$.
 f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$
هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في a ونرمز له بالرمز : $f'_d(a)$.

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمز للعدد المشتق للدالة f في العدد a بالرمز : $f'_g(a)$.

خاصية :

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في عدد a إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a و
 $f'_d(a) = f'_g(a)$

بتعبير آخر : $(f \text{ قابلة للاشتقاق في } a) \Leftrightarrow (f'_d(a) = f'_g(a))$.

خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد a تكون متصلة في العدد a .

انتبه ! العكس غير صحيح . (اعتبر الدالة $|x|$)

قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة f ق ش على مجال $]a, b[$ إذا كانت ق ش في جميع نقطه .
تكون f ق ش على $]a, b[$ إذا كانت ق ش على $]a, b[$ وعلى اليمين في a .
تكون f ق ش $]a, b[$ إذا كانت ق ش على $]a, b[$ وعلى اليسار في b .
ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

مماس منحني دالة - نصف مماس منحني دالة

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد a فإن منحناها يقبل مماساً في النقطة $M(a, f(a))$ معادلته $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$
ملاحظة : العدد $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمماس في a .

إذا كانت f ق ش على اليمين في a فإن منحناها يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M(a, f(a))$ معادلته : $\begin{cases} y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$
إذا كانت f ق ش على اليسار في a فإن منحناها يقبل نصف مماس على اليمين في $M(a, f(a))$ معادلته : $\begin{cases} y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

الإشتقاق

2 عت

ليكن T عددا حقيقيا موجبا قطعاً. و f دالة معرفة على مجموعة D .

نقول إن f دورية و T دور لها إذا كان: $(\forall x \in D) : \begin{cases} x \pm T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

6. مشتقات الدوال الاعتيادية والعمليات :

حيز تعريف الدالة المشتقة	الدالة المشتقة	الدالة f
\mathbf{R}	\mathbf{o}	c
\mathbf{R}	\mathbf{a}	ax
\mathbf{R}	nx^{n-1}	x^n $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$
R_-^* أو R_+^*	rx^{r-1}	x^r $n \in \mathbf{Z}^- - \{-1\}$
R_+^*	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$
R_+^*	rx^{r-1}	x^r $r \in \mathbf{Q}^*$
R_-^* أو R_+^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
R_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
\mathbf{R}	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
\mathbf{R}	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
على كل مجال ضمن $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / \pi \in \mathbf{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
R_-^* أو R_+^*	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
\mathbf{R}	e^x	e^x
حيث تكون u ق ش	$\alpha u'$	αu
حيث تكون u و v ق ش	$u' + v'$	$u + v$
حيث تكون u و v ق ش	$u'v + uv'$	$u \cdot v$
حيث تكون u و v ق ش و v لاتعدم	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
حيث تكون u ق ش و لاتعدم	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
حيث تكون u ق ش و موجبة قطعاً	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	\sqrt{u}
حيث تكون u ق ش و موجبة قطعاً	$\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$
حيث تكون u ق ش	$nu^{n-1} \cdot u'$	u^n $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$
حيث تكون u ق ش و لاتعدم	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
\mathbf{R}	$u'e^u$	e^u

خاصية: مشتقة دالة الجذر

ليكن n من $\mathbf{N}^* - \{1\}$. دالة الجذر من الرتبة n ق ش على R_+^* ولدينا: $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ لكل x من R_+^*

خاصية

ليكن n من $\mathbf{N}^* - \{1\}$ ، إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعاً على مجال I فإن الدالة $\sqrt[n]{u}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا: $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$ لكل x من I .

4. تطبيقات:

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .
 f تزايدية على I يكافئ $f'(x) \geq 0$ لكل x من I .
 f تناقصية على I يكافئ $f'(x) \leq 0$ لكل x من I .

لتكن f دالة ق ش على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I تقبل f مطرافاً في x_0 إذا فقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها في x_0

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .
 I تقعر C موجه نحو الأعلى يكافئ $f''(x) \geq 0$ لكل x من I هندسياً: C يوجد فوق جميع مماساته
 I تقعر C موجه نحو الأسفل يكافئ $f''(x) \leq 0$ لكل x من I هندسياً: C يوجد تحت جميع مماساته
 إذا كانت f' تنعدم في x_0 من I وتغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $I(x_0, f(x_0))$ انعطاف للمنحنى C .
 هندسياً: تغير C يتغير في النقطة $I(x_0, f(x_0))$.

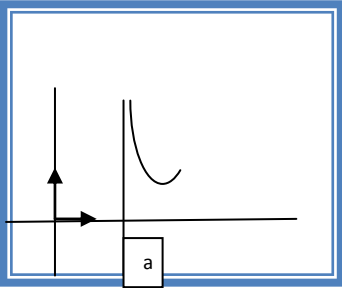
5. عناصر تماثل منحنى دالة:

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D و a و b عددين حقيقيين. يكون المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تماثل منحنى f إذا فقط إذا كان لكل x من D لدينا $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$
 تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل منحنى f إذا فقط إذا كان لكل x من D لدينا: $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

ملاحظات:



محور تماثل منحنى دالة دائماً يكون مواز محور الأرتاب. مركز تماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.

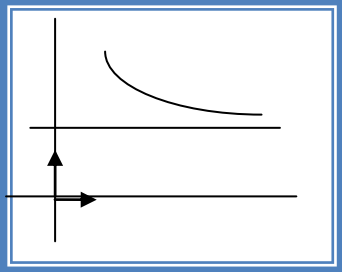


المستقيم المعرف بالمعادلة

$$x = a$$

مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$



المستقيم المعرف

$$y = \alpha$$

مقارب أفقى لمنحنى الدالة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

نحسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$


<http://www.vras-colorpages.net>

العدد 0

عدد حقيقي غير منعدم a

مالانهائية

منحنى الدالة f يقبل فرعا
شلمجيا في اتجاه محور
الأفاصيل جوار $+\infty$

Wadifi

نحسب
النهائية

Wadifi

منحنى الدالة f يقبل فرعا
شلمجيا في اتجاه محور
الأرتاب جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$$

عدد حقيقي b

مالانهائية

wadiüfi@hotmail.com

المستقيم المعرف بالمعادلة $y = ax + b$ مقارب لمنحنى
الدالة f جوار $+\infty$

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلمجيا في اتجاه المستقيم المعرف بالمعادلة
 $y = ax$ جوار $+\infty$

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ فإن المستقيم المعرف بالمعادلة $y = ax + b$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $+\infty$

الدوال اللوغاريتمية والأسية

ع 2

2. الدالة الأسية النبرية

التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبري \ln تسمى الدالة الأسية النبرية ونرمز لها بالرمز : \exp .

نتائج :

* الدالة \exp معرفة ، متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbf{R}
 * لكل x و y من \mathbf{R} : $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$
 $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

* لكل x من \mathbf{R} : $\ln(\exp(x)) = x$

* لكل x من $]0, +\infty[$: $\exp(\ln x) = x$

* لكل x من \mathbf{R} : $\exp(x) > 0$

* $\exp(0) = 1$ و $\exp(1) = e$

* لكل x من \mathbf{R} : $\exp(x) = e^x$



خصائص جبرية

لكل x و y من \mathbf{R} لكل r من \mathbf{Q} :

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$e^{rx} = (e^x)^r, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

النهايات الاعتيادية : $(n \in \mathbf{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$

* الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على \mathbf{R} و $(e^x)' = e^x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$)

* إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbf{R}

فان : $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا

$$(\forall x \in I) : (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

نتيجة : إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة

$x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$ هي الدوال المعرفة على I

بما يلي : $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ مع $\lambda \in \mathbf{R}$

1. الدالة اللوغاريتمية النبرية :

الدالة الاصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم

في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبري ، ونرمز لها ب : \ln

نتائج :

* الدالة \ln معرفة ، متصلة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

* الدالة \ln تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

بتعبير اخر : لكل x و y من $]0, +\infty[$: $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$
 $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

خصائص جبرية

لكل x و y من $]0, +\infty[$ و لكل r من \mathbf{Q} لدينا :

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y, \quad \ln x^r = r \ln x$$

نهايات هامة :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية النبرية :

* الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

* إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على مجال I

فان الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I, \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

نتيجة : إذا كانت u قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على مجال I فان

الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ هي الدوال المعرفة على

I بما يلي : $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ مع $\lambda \in \mathbf{R}$

الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

ليكن a عنصراً من $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. الدالة اللوغاريتمية للأساس a

هي الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بما $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\forall x > 0$,

دالة اللوغاريتم للأساس 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و تكتب \log .

الدوال الأصلية

2 ع ت

جدوال دوال أصلية :

ف و f مجال تعريف	الدوال الأصلية F	الدالة f
\mathbf{R}	\mathbf{C} 'عدد ثابت'	\mathbf{o}
\mathbf{R}	$ax + b$	\mathbf{a}
\mathbf{R}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	x^n مع $n \in \mathbf{N}^*$
$]0; +\infty[$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	مع $\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbf{N} - \{0,1\}$)
$]0; +\infty[$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	مع x^r ($n \in \mathbf{Q} - \{0,-1\}$)
$]0; +\infty[$	$\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$	$\ln x + c$	$\frac{1}{x}$
\mathbf{R}	$e^x + c$	e^x
\mathbf{R}	$\frac{e^{ax}}{a} + c$	مع a غير منعدم
\mathbf{R}	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\cos(ax + b)$ مع a غير منعدم
\mathbf{R}	$\frac{-1}{a} \cos(ax + b) + c$	$\sin(ax + b)$ مع a غير منعدم
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ مع k من \mathbf{Z}	$\tan x + c$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
حيث u ق ش وموجبة قطعاً	$\frac{1}{r+1} (u(x))^{r+1} + c$	مع $u'(x)u^r(x)$ ($r \in \mathbf{Q} - \{0,-1\}$)
حيث تكون u ق ش وموجبة قطعاً	$2\sqrt{u(x)} + c$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
حيث تكون u ق ش ولا تعتمد	$\frac{-1}{u(x)} + c$	$\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
حيث تكون u ق ش ولا تعتمد	$\ln u(x) + c$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
حيث u ق ش	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

(ق ش : قابلة للإشتقاق)

تعريف دالة أصلية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة عددية F قابلة للإشتقاق
على المجال I بحيث $F'(x) = f(x)$ لكل x من I .

خاصية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I
الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة بما يلي :
 $x \rightarrow F(x) + c$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة : إذا كانت F و G دالين أصليتين على مجال I
فإن : $(\exists c \in \mathbf{R}) (\forall x \in I) : F(x) - G(x) = c$
مع c غير مرتبط بالعدد x .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I وتقبل دوال أصلية عليه.
 x_0 عنصر من I . y_0 عدد حقيقي
توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I تحقق $G(x_0) = y_0$

ملاحظة: تحديد الدالة G يعود إلى تحديد قيمة C

خاصية :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية عليه.

خاصية :

لتكن f و g دالين معرفتين على مجال I و α عددا حقيقيا .
إذا كانت F و G دالين أصليتين على التوالي للدالين f و g على المجال I
فإن . $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I .
. αF دالة أصلية للدالة αf على المجال I .



http://www.usac-colorpages.net

حساب التكامل

2 ع ت

1. تكامل دالة على مجال مغلق :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية عليه.
العدد $F(b) - F(a)$ غير مرتبط بالدالة الأصلية F ويسمى تكامل f

من a إلى b ويرمز له بالرمز : $\int_a^b f(x) dx$

نكتب $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

المتغير x في التكامل $\int_a^b f(x) dx$ صامت ولدينا :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \dots$$

2. علاقة شال :

لكل a و b و c من المجال I :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

نتائج :

$$\int_a^a f(t) dt = 0.$$

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

3. خطانية التكامل :

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt .$$

$$\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt .$$

4. الدالة الأصلية التي تعتمد في نقطة :

الدالة الأصلية للدالة f التي تعتمد في عدد a هي $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

5. التكامل والترتيب :

إذا كان : $f(t) \geq 0$ لكل t من $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

إذا كان : $f(t) \geq g(t)$ لكل t من $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

إذا كان : $a \leq b$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

إذا كان : $a \leq b$

فإن : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b-a)$ حيث M هي القيمة القصوى

للدالة f على $[a, b]$.

6. القيمة المتوسطة :

إذا كان $a < b$

$$(\exists c \in [a, b]) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a, b]$

7. حساب تكامل باستعمال مكاملة بالأجزاء :

إذا كانت : u و v دالتين ق ش و u' و v' متصلتين على $[a, b]$

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

هذه المتساوية تسمى صيغة المكاملة بالأجزاء

8. حساب المساحات :

مساحة حيز المستوى المخصوص بين منحنى دالتين متصلتين على I والمستقيمين
المعرفين بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

. مساحة حيز المستوى المخصوص بين منحنى f ومحور الأفاصل والمستقيمين

$$\int_a^b |f(x)| dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

المعرفين بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي Δ الذي معادلته

$$y = ax + b$$

المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$$\int_a^b |f(x) - (ax + b)| dx ua$$

حيث ua هي وحدة قياس المساحة ولدينا : $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

9. حساب حجم مجسم :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد منظم .

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a, b]$.

حجم الجسم المولد بدوران منحنى f حول محور الأفاصل هو :

$$\int_a^b \pi (f(t))^2 dt uv$$

حيث uv هي وحدة قياس الحجم ولدينا $uv = \|\vec{i}\|^3$



حساب الاحتمال

2 ع ت

1. التعداد:

خاصية: (المبدأ الأساسي للتعداد - أو مبدأ الجداء)

لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا
اذا كان الاختيار الاول يتم بـ n_1 طريقة مختلفة
و الاختيار الثاني يتم بـ n_2 طريقة مختلفة
والاختيار k يتم بـ n_k طريقة مختلفة .

فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$

تعريف: (الترتيبات - التباديلات)

ليكن n و p عنصرين من N^*
كل ترتيب لـ p عنصر مختار من بين n عنصر (مع امكانية تكرار نفس
العنصر) يسمى ترتيبية بتكرار لـ p عنصر من بين n عنصر .
كل ترتيب لـ p عنصر مختار من بين n عنصر يسمى ترتيب بدون تكرار
لـ p عنصر من بين n عنصر (هذا ممكن اذا كان $1 \leq p \leq n$) .
كل ترتيبية بدون تكرار لـ n عنصر من بين n عنصر تسمى تبديلة لـ n
عنصر .

تعريف: (التاليقات)

ليكن n و p عنصرين من N حيث $0 \leq p \leq n$.
وليكن E مجموعة مكونة من n عنصر
كل جزء من E يتكون من p عنصر يسمى تاليفة لـ p عنصر من بين n
عنصر

خاصية: (حساب الاختيارات)

ليكن n و p عنصرين من N^*
عدد الترتيبات بتكرار لـ p عنصر من بين n عنصر هو n^p .

عدد الترتيبات بدون تكرار لـ p عنصر من بين n عنصر
(حيث $1 \leq p \leq n$) هو :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

عدد الترتيبات لـ n عنصر من بين n عنصر هو

$$n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

عدد التاليفات المكونة من p عنصر من بين n عنصر هو $\frac{A_n^p}{p!}$ ونرمز له

بالرمز C_n^p

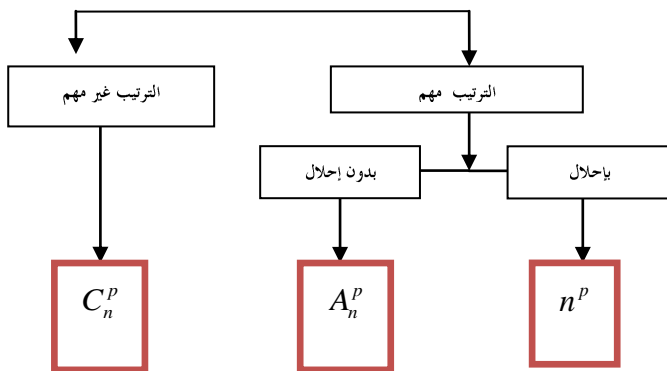
نتائج:

ليكن n من N^* و p عددا صحيحا طبيعيا حيث $0 \leq p \leq n$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

علاقة باسكال: $(p+1 \leq n) C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$



حيث في حالة سحب كرات من كيس :

n هو عدد الكرات الموجودة في الكيس و p هو عدد الكرات التي نريد سحبها

2. احتمال على مجموعة منتهية :

تعريف: (احتمال على مجموعة منتهية)

ليكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ كون إمكانيات تجربة عشوائية
عندما نربط كل جزء A من Ω بعدد حقيقي $p(A)$ بحيث :

$$p(\Omega) = 1$$

$$\forall (A, B) \in P(\Omega)^2 \quad A \cap B \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

نقول إننا عرفنا احتمالا على Ω .



مصطلحات

الزوج (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا

كل جزء من Ω يسمى حدثا

لكل i من $\{1, 2, \dots, n\}$ لحدث $\{\omega_i\}$ يسمى حدثا ابتدائيا

اذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول ان A و B حدثين غير منسجمين

نتائج

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا و A و B حدثين

$$p(\Phi) = 0$$

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad (\text{حيث } \bar{A} \text{ متمم } A \text{ في } \Omega)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

حساب الإحتمال

2 ع ت

خاصية : (فرضية تساوي الاحتمالات)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منتهيا
إذا كانت جميع الاحداث الابتدائية متساوية الاحتمال نقول ان فرضية
تساوي الاحتمالات محققة واحتمال كل حدث A في هذه الحالة هو

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

3. الاحتمال الشرطي :

تعريف : (الاحتمال الشرطي)

ليكن (Ω, p) يسمى فضاء احتمالي منتهيا . و A و B حدثين بحيث

$$p(A) \neq 0$$

احتمال B علما ان A محقق هو $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

ونرمز له بالرمز $p_A(B)$ او $p(B/A)$

خاصية : (صيغة الاحتمالات المركبة)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منتهيا و A و B حدثين حيث

$$p(A)p(B) \neq 0$$
 لدينا $p(A/B)p(B) = p(B)p(B/A)$

تعريف : (تجزئة)

نقول ان الاحداث B_1 و B_2 و و B_n تكون تجزئة لفضاء Ω اذا
كان :

. الاحداث B_1 و B_2 و و B_n غير منسجمة متني متني .

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$$

خاصية : (صيغة الاحتمالات الكلية)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي و B_1 و B_2 و و B_n تجزئة حيث

$$\forall i \in [1, n] \quad p(B_i) \neq 0$$

لكل A حدث ضمن Ω لدينا $p(A) = \sum_{i=1}^n p(A/B_i)p(B_i)$

تعريف : (استقلالية حدثين)

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad \text{و } A \text{ و } B \text{ مستقلين اذا كان}$$

خاصية : (استقلالية اختبارات)

اذا كان P احتمال الحدث A . واعدنا نفس الاختبار n مرة في ظروف

مستقلة فان احتمال وقوع k مرة الحدث هو $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

4. المتغير العشوائي :

تعريف : (المتغير العشوائي)

(Ω, p) فضاء احتمالي منته

عندما نربط كل عنصر من Ω بعدد x_i نقول أننا عرفنا متغيرا عشوائيا
على $[a, b]$.

تعريف : (قانون احتمال المتغير)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منته و X متغير عشوائي معرف على Ω

الجموعه $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ تسمى مجموعة قيم X .

الدالة العددية التي تربط كل قيمة x_i بالعدد $p(X = x_i)$ تسمى

قانون احتمال المتغير X

تعريف : (وسيطات المتغير العشوائي)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منته و X متغير عشوائي معرف على Ω

$$E(X) = \sum_{k=1}^m x_k \cdot p(X = x_k)$$
 الامل الرياضي

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
 المغايرة

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$
 الانحراف الطرازي



5. القانون الحداني :

تعريف : (المتغير العشوائي الحداني)

ليكن n عدد موجب و $p \in [0, 1]$ عدد حقيقي

المتغير العشوائي X الذي قانونه الاحتمالي معرف بما يلي

$$\forall k \in [0, n] \quad p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p .

خاصية : (وسيطات المتغير العشوائي الحداني)

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p لدينا

$$E(X) = np$$
 الامل الرياضي

$$V(X) = np(1-p)$$
 المغايرة



المعادلات التفاضلية

2 ع ت

1. المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

تعريف : (المعادلة $y' = ay$)

ليكن a عددا حقيقيا . المعادلة $y' = ay$ ذات الجهور الدالة العددية y قابلة للاشتقاق على R تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى .

ملاحظة :

اذا كان $a = 0$ فان المعادلة تصبح $y' = 0$ و بالتالي y دالة ثابتة .

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$)

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو $y = \alpha e^{ax}$ حيث

$$\alpha \in R$$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$ بشرط بدئي)

ليكن a و x_0 و β اعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = \beta \end{cases} \quad \text{النظمة}$$

تقبل حلا وحيدا وهو $y = \beta e^{a(x-x_0)}$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay + b$)

ليكن a و b اعداد حقيقية غير منعدمة .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث

$$\alpha \in R$$

2. المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية :

تعريف : (المعادلة $y'' + ay' + by = 0$)

ليكن a و b عددين حقيقيين . المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ ذات الجهور الدالة العددية y قابلة للاشتقاق مرتين على R تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .

ملاحظة :

اذا كان $b = 0$ و $a \neq 0$

فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح $z' + az = 0$ حيث

$z = y'$ و بالتالي نعود الى حلول المعادلة من الدرجة الاولى .

اذا كان $b = 0$ و $a = 0$ فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح

$y'' = 0$ و بالتالي $y = \alpha x + \beta$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

خاصية : (حل المعادلة $y'' + ay' + by = 0$)

ليكن a و b عددين حقيقيين . حيث $b \neq 0$

نعتبر المعادلة $y'' + ay' + by = 0$.

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r عدد عقدي تسمى معادلتها المميزة .
ليكن Δ مميز هذه الاخيرة .

اذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية

$$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \text{حيث } (\alpha, \beta) \in R^2$$

اذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلا مزدوجا r والحل العام

للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية $y = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث

$$(\alpha, \beta) \in R^2$$

اذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين

$p + iq$ و $p - iq$ والحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px} \quad \text{حيث } (\alpha, \beta) \in R^2$$

حالات خاصة :

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y'' - \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ حيث

$$(\alpha, \beta) \in R^2$$

الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$.



نهاية الملخص