ملخص المتتاليات العدديـــة ذ الرقبة

I- تعاريف وخاصيات

1) المتتالية العددية هي تطبيق مجال I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$.
صورة عنصر n من I تكتب u_n (أو v_n , ...)

2) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث $u_n \leq M$ لكل $n\geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث $m\leq u_n$ لكل $n\geq n_0$.

3) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة إذا كانت مصغورة ومكبورة أي يوجد عددان حقيقيان m و M بحيث :
$m\leq u_n\leq M$ لكل $n\geq n_0$.
• $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة يكافئ يوجد عنصر a من $\mathbb{R}^+$ بحيث $|u_n|\leq a$ لكل $n\geq n_0$.

4) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ لكل $n\geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية قطعا إذا كان $u_{n+1}\succ u_n$ لكل $n\geq n_0$.

5) • المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ لكل $n\geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية قطعا إذا كان $u_{n+1}\prec u_n$ لكل $n\geq n_0$.
• المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

6) • $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $u_{n+1}=u_n+r$ لكل $n\geq n_0$. (العدد r يسمى أساس المتتالية).
• $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية يكافئ $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$ لكل $n\geq n_0+1$.
• إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $u_n=u_k+(n-k)r$ لكل $n\geq k\geq n_0$.
• نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+...u_{n-1}$ و $p\geq n_0$.
إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية فإن $S_n=\dfrac{n-p}{2}(u_p+u_n)$
إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية فإن $S_n=\dfrac{n}{2}(u_0+u_n)$

7) • $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1}=qu_n$ لكل $n\geq n_0$.
• $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية يكافئ $u_n^2=u_{n-1}.u_{n+1}$ لكل $n\geq n_0+1$.
• إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n=u_k.q^{n-k}$ لكل $n\geq k\geq n_0$.
• نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+...u_{n-1}$ و $p\geq n_0$.
إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q بحيث $q\neq 1$ فإن $S_n=u_p\dfrac{1-q^{n-p}}{1-q}$

II- نهاية متتالية

أمثلة اعتيادية

• المتتاليات التالية تؤول إلى $+\infty$:
$(a\succ 1)(a^n)$, , $\sqrt{n}$ (n^2) , (n)
• المتتاليات التالية تؤول إلى **0** :
$(|a|\prec 1)(ka^n)$, $\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{k}{n}\right)$

خاصيات

- إذا كان $\lim(u_n)=+\infty$ فإن $\lim(-u_n)=-\infty$
- $\lim(u_n)=l$ تكافئ $\lim(u_n-l)=0$
- $\lim(u_n)=l$ تكافئ $\lim|u_n-l|=0$

III- التقارب والترتيب

1) مصاديق تقارب متتالية

- (u_n) و (v_n) متتاليتان و l عدد حقيقي بحيث $|u_n-l|\leq v_n$ لكل $n\geq N$
إذا كان $\lim v_n=0$ فإن $\lim u_n=l$
- (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث $v_n\leq u_n$ لكل $n\geq N$
إذا كان $\lim(v_n)=+\infty$ فإن $\lim(u_n)=+\infty$
إذا كان $\lim(u_n)=-\infty$ فإن $\lim(v_n)=-\infty$
- (u_n) و (v_n) و (w_n) متتاليات بحيث $w_n\leq u_n\leq v_n$ لكل $n\geq N$
إذا كان $\lim(v_n)=\lim(w_n)=l$ فإن $\lim(u_n)=l$
إذا كان $u_n\leq v_n$ لكل $n\geq N$ وكانت المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتين
فإن $\lim(u_n)\leq\lim(v_n)$

2) خاصية

- كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة.
- كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

IV- العمليات على النهايات

(u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان و α عدد حقيقي.

- إذا كان $\lim(u_n)=l$ و $\lim(v_n)=l'$ فإن
$\lim(u_n+v_n)=l+l'$; $\lim(\alpha u_n)=\alpha l$; $\lim(u_nv_n)=ll'$
- إذا كان $\lim(u_n)=l$ و $\lim(v_n)=l'$ بحيث $l'\neq 0$
فإن $\lim\left(\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{l'}$; $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{l}{l'}$

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n+v_n)$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n\times v_n)$
$l\succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l\succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l\prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim(u_n)=+\infty$	$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)=0$
$\lim(u_n)=-\infty$	$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)=0$
$\lim(u_n)=0$	$\lim\frac{1}{\lvert u_n\rvert}=+\infty$