ملخـــص الهندســـة الفضائيـــة

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(A) 1) المستقيم : $D(A,\vec{u})$ هو مستقيم مار من $A(x_A,y_A,z_A)$ وموجه بـ $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$(D)\ :\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \quad / \ t\in\mathbb{R} \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

وإذا كانت $\alpha.\beta.\gamma \neq 0$ فإن $(D):\dfrac{x-x_A}{\alpha}=\dfrac{y-y_A}{\beta}=\dfrac{z-z_A}{\gamma}$

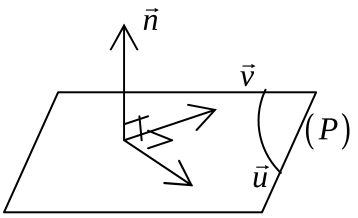
2) المستوى : a) المستوى المعرف بنقطة ومتجهتان غير مستقيميتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$

a₁) $M(x,y,z)\in(P) \iff \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0$

a₂) لدينا $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{n}$ ، و $\vec{n}$ منظمية على (P) إذن معادلة (P) تكون على شكل :

$(P): ax+by+cz+d=0$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$

b) المستوى المعرف بنقطة ومتجهة منظمية $\vec{n}(a,b,c)$



$M\in(P) \iff \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$

إذن معادلة (P) تكون على شكل : $ax+by+cz+d=0$

ولتحديد d نعوض x و y و z بإحداثيات B $(B\in P)$.

3) الفلكــة

a) الفلكة المعرفة بمركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعها R $(R\geq 0)$

$M(x,y,z)\in S(\Omega,R) \iff \Omega M = R$

$(S)\ :\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

b) الفلكة المعرفة بأحد أقطارها $[AB]$

$M\in(S) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

$(S)\ :\ (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

(B) الأوضاع النسبية

1) مستقيمين في الفضاء : $D(A,\vec{u})\ //\ \Delta(B,\vec{v}) \iff$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

$\iff \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

$D(A,\vec{u})\ \perp\ \Delta(B,\vec{v}) \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

2) مستقيم ومستوى : $\vec{n}$ منظمية على (P)

و $\vec{u}$ موجهة لـ (D) $\qquad P\perp D \iff \vec{n}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

$P\perp D \iff$ المنظمية على (P) هي متجهة موجهة لـ (D)

ملاحظــة : لدراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستوى تحليليا، نحل النظمة :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

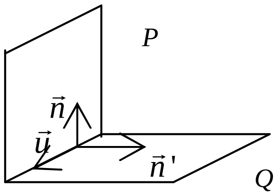
هناك ثلاث حالات :
1) $D\cap P=\varnothing$
2) $D\subset P$
3) (D) و (P) يتقاطعان في نقطة وحيدة.

3) مستوى ومستوى : $(P): ax+by+cz+d=0$ و $(Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$

a) $(P)//(Q) \iff$ الأعداد a و b و c متناسبة مع الأعداد a' و b' و c'.

b) $(P)\perp(D) \iff \vec{n}\perp\vec{n}' \iff \vec{n}\cdot\vec{n}'=0$

c) $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{u}$ و $\vec{u}\neq\vec{0} \Leftarrow$ (P) و (Q) متقاطعان وتقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}$.



4) فلكة ومستقيم : $S(\Omega,R)$ و $D(A,\vec{u})$

$$d(\Omega,D)=\frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=d$$

الحالة① $R\prec d \Leftarrow S\cap D=\varnothing$

الحالة② $R=d \Leftarrow$ D مماس للفلكة (S)

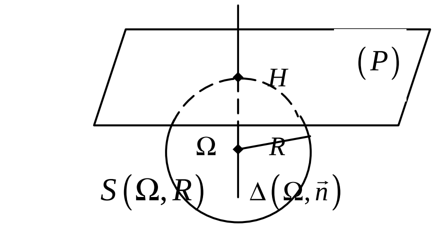
الحالة③ $R\succ d \Leftarrow$ D يقطع (S) في نقطتين.

ملاحظـة : لدراسة تقاطع مستقيم وفلكة تحليليا، نحل النظمة :

$$\begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \quad / \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+t\gamma \\ x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0 \end{cases}$$

5) فلكة ومستوى : $(P): ax+by+cz+d=0$. $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ، $S(\Omega,R)$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=h$$

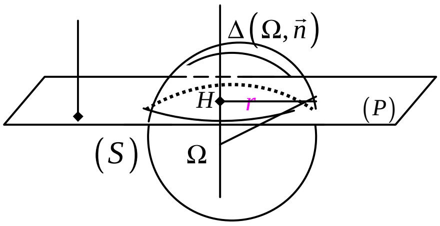


$\Omega H=R$

الحالة① $h\succ R$ $\quad S\cap P=\varnothing$

الحالة② $h=R$ $\quad$ المستوى (P) مماس للفلكة (S)

الحالة③ $h\prec R$ $\quad (S)\cap(P)=\ell(H,r)$



حيث H هي نقطة تقاطع المستوى (P)

$\Omega H=h$

والمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \quad / \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+tc \end{cases}$

و $R^2=r^2+h^2$

$r=\sqrt{R^2-h^2}$

(C) **(1** $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$; $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(2 $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

(3 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

(4 $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

(D) • مساحة المثلث ABC هي $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

• المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية على المستوى ABC.