

فرض2 الدورة1

تمرين 1 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \quad : \text{(a) بين أن} \quad -1$$

(b) بين أن (u_n) تزايدية قطعاً.

$$v_n = 1 - \frac{2}{1+u_n} \quad : \quad \text{نضع لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \quad -2$$

(a) بين أن (v_n) متالية هندسية أساسها

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad : \mathbb{N} \quad n$$

(b) نضع لكل

$$S_n = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \quad : \quad \text{بين أن}$$

n أحسب بدلالة v_n (c)

أحسب (d) بدلاًة u_n

تمرين 2 :

$$(E) : z \in \mathbb{C}; z^2 - 2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)z - 1 = 0 \quad : (E)$$

حيث θ بارا متر حقيقي يحقق

-1 حل المعادلة (E) من أجل θ ثم من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$

٢- حل قيم θ التي من أجلها المعادلة (E) تقبل حلاً وحيداً. ثم أعط حل المعادلة (E) من أجل كل قيمة لـ θ حصلت عليها

3- من الحالة العامة نعتبر z_1 و z_2 هما حلّي المعادلة (E)

$$t_2 = (z + 1)(\cos \theta - i \sin \theta) \quad \text{و} \quad t_1 = (z_1 + 1)(\cos \theta - i \sin \theta) \quad \text{نبع}$$

$$t \in \mathbb{C}; t^2 - (4 \cos \theta)t + 2 = 0 \quad . \quad (E')$$

(b) حدد قيمة θ التي من أجلها يكون t_1 و t_2 حقيقيان

c) بین أنه إذا كانت t_1 و t_2 حقیقیان فان $z_1 + 1$ و $z_2 + 1$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \right) = \dots = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} \right) = 0$$

(d) **النهاية**: $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = \infty$ و $\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) = \infty$.

سیریں ۵۔

يُيل f الصُّبُّوق المُعْرَف مِن $\{\cdot\}$ إِلَى $\{\cdot\}$ لَهُوَ بِمَا يَيِّي :

$$z \mapsto f(z) = \frac{\iota z}{z+i}$$

من المستوى العدي نعتبر النقطة M ذات الحق Z

$$f(z_0) = 1 + 2i \quad \text{حيث } z_0 \text{ حق النقطة } B$$

- ليكن r و θ عداد حقيقيان حيث $|z+1|=r$ و $\arg(z+1)\equiv\theta[2\pi]$

حدد بدلالة r و θ معيار وعده العقدي $f(z)-i$

-3- لتكن A النقطة ذات الحق $-i$

(a) حدد (ℓ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)-i|=\sqrt{2}$

(b) حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(f(z)-i)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

تمرين 4 :

نعتبر الدودية P المعرفة على \mathbb{C} بما يلي :

-1- بين أن المعادلة : $(E) z \in \mathbb{C}, P(z)=0$ تقبل حلات خيالا صرفا و حده

-2- حل من \mathbb{C} المعادلة (E)

-3- $\arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\arg(z_A)\equiv 0[2\pi]$ حيث z_A و z_B و z_C حلول المعادلة (E)

لتكن

$$(a) \text{ أكتب على الشكل المثلثي العدد } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

(b) استنتاج طبيعة المثلث ABC حيث A و B و C هي صور الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C على التوالي

تمرين 5 :

نعتبر الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

-1- بين أن f متصلة من $x_0=0$

-2- أدرس قابلية اشتقاق f من $x_0=0$

-3- أدرس تغيرات f على المجال $[0,+\infty)$ وبين أن لكل x من $]-\infty, 0]$ ثم أعط جدول تغيرات $f'(x)$

-4- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ و أول النتيجة هندسيا

و أول النتيجة هندسيا -5- أحسب

تمرين 6 :

(a) أحسب $(-1+3i)^2$: -1

(b) حل من \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (3-i)z + 4 = 0$

من المستوى العقدي المنسوب لمعلم m (b) نعتبر النقط $A(1+i)$ و $B(2-2i)$ و $C(bi)$ حيث $b \in \mathbb{R}$

-2- م

(a) حدد قيمة العدد b ليكون المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C

(b) بين من هذه الحالة أن المثلث ABC قائم الزاوية من C

تمرين 7 :

ليكن θ حيث عدد حقيقي $\pi < \theta < 0$. نعتبر من \mathbb{C} المعادلة : $(E) : z^2 - 2(1+i\sin\theta)z + 2i\sin\theta = 0$

- 1- بين أن حل المعادلة (E) هما : $z_1 = (1-\cos\theta)z + i\sin\theta = 0$ و $z_2 = (1+\cos\theta)z + i\sin\theta = 0$
- (a) أنشر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ واستنتج قيمتي $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ و $\cos 2\alpha$
- (b) أعط الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2

تمرين 8 :

نعتبر العددين العقديين $v = \frac{u-1}{u+1}$ حيث $u = e^{i\theta}$ و $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$

- 1- عمل البسط و المقام بـ $v = i \tan \frac{\theta}{2}$ ثم استنتاج أن :

- 2- حدد معيار و عدة العدد العقدي v حسب قيمة θ

تمرين 9 :

نعتبر الدالة f العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}-1)^2; & x > 1 \\ \sqrt[3]{1-x}; & x \leq 1 \end{cases}$$

- 1- حدد D_f

- 2- بين أن f متصلة من $x_0 = 1$

- 3- أحسب النهايتين : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)}{x-1}$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1}$. وأول النتيجة هندسيا

تمرين 10 :

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $[0, \pi]$

- 1- بين أن : $\cos^2 \theta + 2i\sin\theta = (1+i\sin\theta)^2$

- 2- حل من \mathbb{C} المعادلة : $(E) : z^2 - 2z\cos\theta - 2i\sin\theta = 0$

- 3- أكتب حل المعادلة (E) على الشكل المثلثي

- 4- حدد من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعمد (o, \vec{u}, \vec{v}) مجموعة النقاط $M(1+\cos\theta + i\sin\theta)$ منظم و مباشر عندما يتغير θ من المجال $[0, \pi]$

تمرين 11 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

و ليكن (ℓ) منحنى f من المستوى منسوب لمعلم متعمد و منظم

- 1- حدد D حيز تعریف الدالة f و أحسب نهايتها عند محدات

-2) أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا

ب) بين أ، $f'(x) = \frac{2x-3}{2(x-1)} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ لكل x من $D - \{0\}$

ج) أعط جدول تغيرات f

-3) أثبت أن المنحنى (ℓ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا

ب) أنشئ المنحنى (ℓ)

-4) أ) بين أن g قصور f على المجال $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ تقابل من $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده

ب) مثل مبيانيا g^{-1} التقابل العكسي للدالة g

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n \sqrt{\frac{u_n}{u_n - 1}} \end{cases} \quad \text{-5) نعتبر الدالة } (u_n) \text{ المعرفة بما يلي :}$$

أ) بين أن (u_n) تزايدية

ب) هل (u_n) مكبورة. علل جوابك

ج) مادا يمكنك أن تستنتج

تمرين 12:

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \cdot \sqrt[6]{x} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{3 - \tan^2 \frac{\pi}{x}} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad -3$$

تمرين 13 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة ب :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right), x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

-1) أدرس اتصال الدالة f عند 0

-2 أدرس زوجية الدالة f

-3 أدرس رتابة الدالة f على \mathbb{R}^+ ثم استنتج رتابتها على \mathbb{R}^-

-4 بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J يتم تحديده $f^{-1}(x)$

-5 حدد الدالة العكسية f^{-1}

-6 استنتاج تبسيطاً : $f(x)$

تمرين 14 :

أ عدد حقيقة معلوماً ولتكن (u_n) المتالية العددية المعرفة بـ :
 $\begin{cases} u_o \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = au_n + (1-a)u_{n-1} \end{cases}$ ليكن

لتكن (v_n) المتالية العددية المعرفة بـ :

-1- بين أن (v_n) هندسية. ثم أكتب v_n بدلاً من a

-2- استنتاج كتابة u_n بدلاً من a

-3- حدد مجموعة قيم a التي تكون من أجلها (u_n) متقاربة

تمرين 15 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{2+x^{\frac{3}{2}}}$$

ليكن (ℓ) هو المنحني الممثل ل f من مم م $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

-1- أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ب) أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسياً

-2- أ) بين أن من أجل $x > 0$ لدينا

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \left(2 + x^{\frac{3}{2}} \right)^2}$$

ب) استنتاج تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها

-3- أرسم (ℓ) (تحديد نقط الانعطاف التي يقبلها (ℓ)) غير مطلوب

-4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty]$

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

ب) أحسب العدد المشتق للدالة g^{-1} في النقطة ذات الأقصول (4)

ج) أرسم منحني g^{-1} من المعلم $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

-5- نعتبر المتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2\sqrt{n}}{2+n\sqrt{n}}$$

أ) بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* لدينا $0 < u_n \leq \frac{2}{3}$

ب) أثبت أن المتالية (u_n) تنقصصية. و استنتاج أنها متقاربة

ج) حدد نهاية (u_n)

تمرين 16 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}; & x \geq 0 \\ \arctan g(x\sqrt{x^2+1}); & x < 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

ليكن (ℓ) منحنى الدالة f من معلم متعمد وممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

-1 أحسب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

استنتج طبيعة الفرع الالهائي للمنحنى (ℓ) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

-2 (a) بين أن f متصلة من $x_0 = 0$

(b) بين أن f قابلة للاشتاقاق من $x_0 = 0$

-3 أدرس تغيرات الدالة f . أعط جدول تغيرات f

-4 أنشئ (ℓ)

-5 (a) بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال يجب تحديده J

(b) أنشئ من نفس المعلم (o, \vec{i}, \vec{j}) منحنى الدالة (ℓ')

$$f^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right) = x \quad : \quad \text{حل من } \mathbb{R}^+ \text{ المعادلة}$$

-6 (a) بين أن $\forall x \in]0, +\infty[; f(x) < x$:

(b) استنتاج رتبة المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : لكل $n \in \mathbb{N}$

(c) هل (u_n) متقاربة (عل جوابك)

تمرين 17 :

-1 حل من \mathbb{C} المعادلة $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ حيث $(E) : z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 t} = 0$:

-2 لكن z_1 و z_2 حلّي المعادلة (E) . حدد حسب قيم t معيار وعده z_1 و z_2

-3 نفترض أن $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ صورة z_1 و M_1 صورة z_2 .

(a) بين أن $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[OM_1 = OM_2$:

(b) بين أن لحق المتجهة $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ غير مرتبطة بـ t

تمرين 18 :

-1 أخطأط : $\cos^3 \theta$

-2 حدد الدالة الأصلية للدالة $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ و التي تتحقق $x \mapsto \cos^3 2x$:

تمرين 19 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{\sqrt{|x|}}$$
 1- أدرس الدالة f . (مجموعة التعريف - النهايات - التغيرات)

- 2- بين أنه يوجد عدد حقيقي α محصور بين -1 و $-\frac{1}{4}$ بحيث $f(\alpha) = 0$

3- ليكن (ℓ) المنحنى الممثل للدالة من معلم متعدد منظم

(a) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ℓ)

(b) أرسم (ℓ)

4- لتكن g قصور f على $[-\infty, 0]$

(a) بين أن g تقابل من \mathbb{R}^* نحو مجال J يجب تحديده

(b) أرسم (Γ) منحنى الدالة العكسية g^{-1} للدالة g

(c) أحسب إحداثياتي نقطة تقاطع (ℓ) و (Γ)

5- أحسب α بدلالة $g^{-1}(0)$ و $(g^{-1})'(0)$

6- ناقش حسب قيم m عدد حلول كل من المعادلتين :

$$(E_1) : (x-m-1)\sqrt{|x|} + 2 = 0$$

$$(E_2) : (\sqrt{x}-m-1)\sqrt[4]{x} + 2 = 0$$