

## فرض محروس 1 الدورة 2 عت 2009/2008 ذ الرقبة

مسألة : (إحدى عشر نقطة)

الفقرة الأولى :

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بما يلي :

$$g(x) = 2 \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}$$

1 [ احسب :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2 [ أ - بين أن :  $g'(x) = -\frac{x+2}{x(x+1)^2}$   $\forall x > 0$

ب - ضع جدول تغيرات الدالة  $g$

3 [ استنتج أن :  $g(x) > 0 \forall x > 0$

الفقرة الثانية :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \\ f(0) = 0 \\ x^2 \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) & ; x > 0 \end{cases}$$

وليكن  $(C_f)$  منحناها في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 [ بين أن الدالة  $f$  متصلة في  $0$

2 [ احسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (ضع  $t = \frac{1}{x}$ ) و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3 [ احسب :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  ؛ ثم أول النتيجة هندسيا .

4 [ أ - بين أن :  $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} \\ x > 0 \Rightarrow f'(x) = xg(x) \end{cases}$

ب - ضع جدول تغيرات الدالة  $f$

5 [ بين أن المستقيم  $(\Delta): y = x+1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

6 [ أنشئ المنحنى  $(C_f)$  . (نقبل أن المستقيم  $(D): y = x - \frac{1}{2}$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ ) .

الفقرة الثالثة :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  بحيث :  $u_1 = -1$  و  $u_{n+1} = u_n e^{\frac{1}{u_n}}$   $\forall n \geq 1$

1 [ بين أن :  $-1 \leq u_n < 0 \forall n \geq 1$

2 [ بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية ؛ و استنتج انها متقاربة .

3 [ احسب  $\lim u_n$  معللا جوابك .