ثانوية أبي العباس السبتي — امتحان تجريبي لسنة 2006 — المادة : الرياضيات
المدة : 4 ساعات — المستوى : 2 س بكا
المعامل : 10 — الشعبة : العلوم الرياضية

التمرين الأول : (2 نقط)

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات حمراء وعلى ثلاث كرات بيضاء ويحتوي صندوق u_2 على كرتين حمراوين و على خمس كرات بيضاء ويحتوي صندوق u_3 على ثلاث كرات يحملن الرقم1 وعلى كرتين تحملان الرقم2.

نسحب كرة من الصندوق u_3 إذا كان الرقم الذي تحمله هو 1 نسحب كرة من u_1 أما إذا كان الرقم الذي تحمله هو 2 فنسحب كرة من u_2 .

1) ماهو احتمال الحصول على كرة حمراء ؟ 1

2) علما أن الكرة المسحوبة حمراء ماهو احتمال أن تكون مسحوبة من u_1 ؟ 1

التمرين الثاني :(3.5نقط)

نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة : $(E): x^2(x^2+7)=y(2x+y)$

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ وليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

نضع : $x=\delta a$ و $y=\delta b$

1) نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E)

أ) تحقق أن : $a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)$ 0.5

ب) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$ 0.5

ج) بين أن : $a=1$ 0.5

د) استنتج أن : $(b+1)^2=\delta^2+8$ 0.75

2) حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة (E) 1

التمرين الثالث : (3نقط)

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

لتكن E_k مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $2xy-x+2ky+2k(k-1)=0$ حيث $(k\in\mathbb{R})$

نضع : $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$

وليكن (X,Y) زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(o,\vec{u},\vec{v})$

1) بين أن معادلة E_k في المعلم $(o,\vec{u},\vec{v})$ هي: 1

$$\left[X+\frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1)\right]^2-\left[Y-\frac{\sqrt{2}}{4}(2k+1)\right]^2=k(1-2k)$$

2) بين أنه توجد قيمتين ل k يكون من أجلهما E_k اتحاد مستقيمين وحدد معادلتيهما في المعلم $(o,\vec{u},\vec{v})$ 0.5

3) في الحالة التي يكون فيها E_k هذلولا حدد في المعلم $(o,\vec{u},\vec{v})$

أ) معادلة ديكارتية لكل من المقاربين ل E_k 0.5

ب) ماهي المجموعة التي يتغير فيها مركز E_k عندما يتغير k 1

<u>التمرين الرابع :.(3.5 نقط)</u>

ليكن a عددا عقديا يخالف 0 و i و $-i$ و (E) المعادلة : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) — 0,5

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $1+ia$ و $1-ia$

أ) بين أن النقط o و A و B تكون مستقيمية إذا وفقط إذا كان a عددا تخيليا صرفا — 0,5

ب) بين أن المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان معيار a يساوي 1 — 0,5

3) نفترض أن : $a = e^{i\alpha}$ حيث : $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right] - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

أ) بين أن : لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $1 + e^{ix} = 2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$ و $1 - e^{ix} = -2i\sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$ — 0,5

ب) استنتج أن : $\frac{1-ia}{1+ia} = -i\tan(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$ — 0,5

د) حدد قيم a التي من أجلها النقط o و A و B تكون مثلثا قائم الزاوية ومتساوي الساقين في o — 1

<u>التمرين الخامس: (8نقط)</u>

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f_n(x) = 1 + x - nx\ln|x| & ,x \neq 0 \\ f_n(0) = 1 \end{cases}$

و (C_n) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن النقطة $A(0,1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n). — 0.5

2) أدرس اتصال وقابلية اشتقاق f_n في 0 على اليمين . — 0.5

3) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من ثلاث نقط ثابتة ينبغي تحديدها. — 0.5

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ — 0.5

5) أدرس تغيرات f_n على المجال $[0, +\infty[$ — 0.5

6) نضع $v_n = 1 + ne^{\frac{1-n}{n}}$ بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ تزايدية (يمكن دراسة رتابة دالة) واحسب نهايتها — 0.5

7) أ) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1, +\infty[$ نرمز له ب α_n — 0.5

ب) بين أن : $\forall x \geq 1 : f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ واستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تناقصية — 1

د) بين أن : $\ln\alpha_n = \frac{1+\alpha_n}{n\alpha_n}$ ثم استنتج $\lim \alpha_n$ — 0.5

ه) بين أن : $\exists c \in]1, \alpha_n[/ \ln\alpha_n = \frac{\alpha_n - 1}{c}$ واستنتج أن : $\forall n \geq 2 : \alpha_n \leq \frac{n+1}{n-1}$ — 1

8) أ) أنشئ المنحنى (C_1) — 1

ب) أحسب التكامل : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f_1(x)dx$ حيث $0 < \lambda < 1$

واستنتج مساحة جزء المستوى الحصور بين (C_1) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : — 1
$x = 1$ و $x = 0$