مؤسسة العراقي2 للتربية و التعليم. ثانوية ابي العباس السبتي.	2ع ر	الاختبار التجريبي في مادة الرياضيات دورة ابريل **2007-2006** المدة 4 ساعات	**A-S-A-M**

التمرين1 (2.75نقطة)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) : $4(y-1)^2 = 5x + 4$

1)ليكن (x,y) حلا للمعادلة (1)

ا- بين أن $y \equiv 0[5]$ أو $y \equiv 2[5]$ (0.75)

ب- استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (1) هي:

$S = \left\{(20k^2 - 8k, 5k) / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(20k^2 + 8k, 2 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\right\}$. (0.5)

ج- حدد $x \wedge y$ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y بدلالة k في $\mathbb{Z}^*$. (1)

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (2) الآتية : $6x - 13y = 7$

حدد في $\mathbb{N}^2$ الحلول المشتركة للمعادلتين (1) و(2). (0.5)

التمرين2 ~~(4نقط)~~ (3,75 نقط)

نضع $E = \mathbb{R}^{*+} x \mathbb{R}$. ونعتبر القانون T المعرف بمايلي :

$\forall(x,y) \in E\ ;\ \forall(x',y') \in E \quad (x,y)T(x',y') = (xx', \sqrt[3]{x}\,y' + yx')$

I . 1) بين أن القانون T تجميعي في E. (0.75)

2) تحقق أن (1,0) هو العنصر المحايد في (E,T) . (0.25)

3) بين أن (E,T) زمرة غير تبادلية. ~~(1)~~ (0,75)

II . لكل (x,y) من E نضع $M_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x} & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ و نعتبر المجموعة $F = \left\{M_{(x,y)} / (x,y) \in E\right\}$

1) أ-بين أن $\forall\ (x,y) \in E; \forall(x',y') \in E : M_{(x,y)}\ x\ M_{(x',y')} = M_{(x,y)T(x',y')}$ ~~(0.5)~~ 0,25

ب- استنتج أن (F,x) جزء مستقر من $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),x)$ ~~(0.25)~~ 0,5

2) نعتبر التطبيق :

$$h : (E,T) \dashrightarrow (F,x)$$
$$(x,y) \dashrightarrow M_{(x,y)}$$

أ- بين أن h تشاكل تقابلي من (E,T) نحو (F,x) . (0.5)

ب- استنتج بنية (F,x) وأعط مقلوب $M_{(x,y)}$ من F. (0.75)

التمرين3 ~~(3.75نقطة)~~ (4 نقط)

المستوى العقدي م-م-م-م $(O,\vec{i},\vec{j})$.نعتبر التطبيق f المعرف على بمايلي: $\forall z \in \mathbb{C}^* : f(z) = \dfrac{\bar{z} + i}{z}$

الجزءA

1) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z والتي من اجلها يكون $|f(z)| = 1$. (0.25)

2)أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = z\bar{z}$ (0.5)

ب-ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة . حدد حسب قيم n في $\mathbb{Z}$ الشكل المثلثي للعدد العقدي $z_1{}^n + z_2{}^n$. (0.75)

التمرين3 (4نقط)

المستوى العقدي م-م-م-م $(O,\vec{i},\vec{j})$.نعتبر التطبيق f المعرف على بمايلي: $\forall z\in\mathbb{C}^*: f(z)=\dfrac{\bar{z}+i}{z}$

الجزءA

1) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z والتي من اجلها يكون $|f(z)|=1$. (0.25)

2)أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=z\bar{z}$ (0.5)

ب-ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة . حدد حسب قيم n في $\mathbb{Z}$ الشكل المثلثي للعدد العقدي $z_1^n+z_2^n$. (0.75)

الجزءB

لتكن (H) المجموعة المعرفة بمايلي $(H)=\{M(z)/f(z)\in i\mathbb{R}\}$

1)بين أن معادلة ديكارتية ل (H) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $x^2-y^2+y=0$ (0.5)

2) أ-بين أن (H) مخروطي محددا طبيعته. (0.25)

ب- حدد تباعده المركزي و بؤرتيه . (0.5)

ج- أنشئ (H) . (0.5)

3) لتكن (H') مجموعة النقط $M(z)$ التي لحقها $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بحيث

$$\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4} \\ \\ y=\dfrac{e^t+e^{-t}+2}{4} \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

أ-بين أن $(H')\subset(H)$ (0.5)

ب-هل لدينا $(H)=(H')$ علل جوابك (0.25)

التمرين4

الجزء 1 (2.25نقطة)

لتكن f الدالة المعرفة بمايلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x^2-\ln x} \ , \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[: x^2-\ln x>0$ (0.5)

2) ادرس اشتقاق f عند 0 (0.25)

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وحدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) (0.5)

4)ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1]$ و $[1,+\infty[$. (0.5)

5)أنشئ (C_f) منحنى الدالة f. (0.5)

الجزء2 (4نقط)

ليكن n في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.نعتبر الدالة f_n المعرفة بمايلي: $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln x} & ,x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall x \in]0,+\infty[: x^n - \ln x > 0$ (0.25)

2) ادرس اتصال و اشتقاق f_n عند 0 على اليمين. (0.5)

3) لتكن g_n الدالة المعرفة بمايلي $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x$ حيث x في $]0,+\infty[$

أ- بين أن g_n تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ (0.25)

ب- استنتج أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n وان $0 < \alpha_n \leq 1$. (0.75)

ج- بين أن $\forall n \geq 2 : \dfrac{1}{n-1} \leq (\alpha_n)^n \leq 1$ (0.5)

د- استنتج $\lim \alpha_n$ (0.5)

ه- حدد إشارة $g_n(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. (0.25)

4) أ- بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[: f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$ (0.5)

ب- ضع جدول تغيرات f_n (0.5)

الجزء3 (3.25نقطة)

لتكن F الدالة المعرفة بمايلي $\forall x > 0 \ ,F(x) = e^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt$

1) أ- بين أن $\forall x \in]0,+\infty[\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dx$ (0.5)

ب- استنتج أن F تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ (0.5)

2) أ- بين أن $\forall x > 0 : F(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t+x}$ (0.25)

ب- استنتج $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ (0.5)

ج- بين أن $\forall x > 0 : \dfrac{e-1}{x+1} \leq F(x) \leq \dfrac{e-1}{x}$ (0.5)

د- استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ (0.25)

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ واحسب $F'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. (0.75)