الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
لجهة كلميم- السمارة
نيابة كلميم
الثانوية التأهيلية الحسن الثاني
بويزكارن

الإمتحان التجريبي- دورة ماي 2010-

مادة الرياضيات

المعامل : 9
المدة الزمنية : 04 ساعات
الشعبة : العلوم الرياضية أ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
قطاع التعليم المدرسي.

(يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية غير قابلة للبرمجة)

السلم	مسألة: (08.75 نقطة)
	الجزء الأول :
	لكل عدد حقيقي m نرمز ب f_m للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
	$f_m(x)=2me^x-e^{2x}-2m$.
	ليكن (C_m) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$
	حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.
(0.5 ن)	1) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_m(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$.
(0.5 ن)	2) ليكن m و m' عددان حقيقيان بحيث $m<m'$.
	أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_m) و $(C_{m'})$.
(0.25 ن)	3) أثبت أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة A يتم تحديدها.
(0.5 ن)	4) بين أنه إذا كان $m\le 0$ فإن f_m تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.
	5) نفترض في هذا السؤال أن $m>0$:
(0.5 ن)	أ- بين أن f_m تقبل مطرافا β_m عند النقطة α_m مع تحديد β_m و α_m.
(0.5 ن)	ب- ليكن $I_m(\alpha_m,\beta_m)$ و Γ مجموعة النقط I_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}^{*+}$, بين أن Γ
	هو منحى الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2e^x$
(0.5 ن)	ت- نحقق أن $g(x)=-2-f_1(x)$: $\forall x\in\mathbb{R}$ و استنتج أن Γ و (C_1) متماثلان بالنسبة للمستقيم دو المعادلة : $(D):y=-1$
(0.5 ن)	6) حدد تقاطع المنحنى (C_2) و المستقيم (D).
(0.5 ن)	7) أنشئ في نفس المعلم المنحنيات التالية : (C_1) و (C_2) و (C_{-1}) و Γ.
(0.5 ن)	8) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_2) و المستقيم (D) و المستقيمين ذوا المعادلتين : $x=0$ و $x=\ln(3)$.
	الجزء الثاني:
(0.5 ن)	1) ليكن $x>0$ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أثبت أن : $0<\frac{g(x)+1}{x}<g'(x)$
(0.5 ن)	2) استنتج أن: $xg'(x)-g(x)>1$; $\forall x>0$
(0.5 ن)	3) استنتج أن الدالة : $x\to\frac{g(x)}{x}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$.

4) لتكن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} G(x)=\int_x^{2x}\frac{g(t)}{t}dt, & x>0. \\ G(0)=-\ln(2) \end{cases}$.

أ- باستعمال السؤال (1) (الجزء 2) أثبت أن : $\forall x>0;\quad 0<G(x)+\ln 2\le g(2x)-g(x)$ (0.5ن)

ب- استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين 0. (0.5ن)

5) أثبت أن $\forall x>0: G(x)\ge g(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ و استنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} G(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x}=+\infty$. (0.5ن)

6) اثبت أن الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ وأن : $\forall x>0;\quad G'(x)=\frac{g(2x)-g(x)}{x}$

7) اعط جدول تغيرات الدالة G. (0.5ن)

(0.5ن)

التمرين الأول: (02.5 نقطة)(السؤالان I و II مستقلان)

I- أوجد في نظمة العد العشري العددين الصحيحين الطبيعيين اللذين يكتبان في نظمة العد ذات الأساس 5 على الشكل $\overline{n01n}_{(5)}$ حيث n عدد صحيح طبيعي أولي. (0.5ن)

II- ليكن p عددا أوليا أكبر أو يساوي 5.

1- بين أن : $p^2\equiv 1[3]$.

2- أ) باستعمال زوجية العدد p بين أنه يوجد q من $\mathbb{N}$ بحيث $p^2-1=4q(q+1)$. (0.5ن)

ب) استنتج أن : $p^2\equiv 1[8]$.

3- بين أن : $p^2\equiv 1[24]$. (0.5ن)

(0.5ن)

التمرين الثاني: (04 نقطة)

لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 1$، نعرف التكامل التالي : $I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$

1) أحسب I_1. (0.5 ن)

2) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 1$: $0\le I_n\le\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$ (0.5 ن)

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 1$: $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ (0.5 ن)

4) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 1$: $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+.....+\frac{2^n}{n}+I_n$ (0.5 ن)

5- نضع لكل عدد صحيح طبيعي $n\ge 1$: $U_n=\frac{2^n}{n!}$

أ- بين أن لكل $n\ge 3$: $U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن لكل $n\ge 3$: $0\le U_n\le U_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ (0.5 ن)

6) استنتج $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ثم $\lim_{n\to+\infty} I_n$. (0.5ن)

7) تحقق أن : $e^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\dots+\frac{2^n}{n!}\right)$ (0.5ن)

التمرين الثالث: (1.25 نقطة)

نعتبر المجموعة التالية: $\mathrm{IM}=\left\{A_n=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 2^n\\ 0 & 1 & 0\\ 2^n & 0 & 2^n\end{pmatrix};\quad n\in\mathbb{Z}\right\}$

1- بين أن : $\mathrm{IM}\neq\varnothing$. (0.25 ن)

2- بين أن IM جزء مستقر في $(\mathrm{IM}_3(\mathbb{R}),\times)$. (0.25 ن)

3- حدد العنصر المحايد بالنسبة $(\mathrm{IM},\times)$. (0.25 ن)

4- هل $\times$ تبادلي في IM . (0.25 ن)

5 - أحسب $(A_2)^3$. (0.25 ن)

التمرين الرابع: (3.5 نقطة)

المستوى العقدي (P) المنسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي a و 1 حيث $a\in\mathbb{C}-\{1\}$.

لتكن f الدالة المعرفة على $(P)-\{B\}$ التي تربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z)$ حيث :

$$z'=\frac{z-a}{z-1}$$

1) بين أنه إذا كانت $M(z)$ صامدة ب F فإن z حل للمعادلة $(G): z^2-2z+a=0$ (0.5 ن)

2) نفترض أن $a=1+e^{i\theta}$, $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ حدد حلي (G) ثم اكتبها على الشكل المثلثي . (1.5ن)

3) في هذا السؤال نفترض أن $a=-1$ لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى حيث $z\neq1$ و $M'(z')$ صورتها بالدالة f .

أ- بين أن $\left(\overline{\vec{e_1},\overrightarrow{BM}}\right)+\left(\overline{\vec{e_1},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv0[2\pi]$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(z'\in i\mathbb{R})\Leftrightarrow(|z|=1)$. (0.5 ن)

ت- استنتج طريقة إنشاء M' صورة النقطة M من الدائرة المثلثية محرومة من النقطة B . (0.5 ن)

إنتهى ■

(يُراعى في التصحيح سلامة و حُسن التحرير)