



C:NS24

HB

9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو الممثل:

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول: (3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. لتكن F مجموعة

المصفوفات $M(x, y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ مع $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

1-1) بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. 0,25

ب) بين أن (F, \times) زمرة غير تبادلية. 1

2- لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من F حيث $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة (F, \times) . 0,5

3- ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي \perp المعروف بما يلي:

$$\forall (x, y) \in E ; \forall (a, b) \in E \quad (x, y) \perp (a, b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a} \right)$$

$\varphi: (F, \times) \rightarrow (E, \perp)$
 $M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$
 نعتبر التطبيق:

أ) احسب $(1, 1) \perp (2, 3)$ و $(2, 3) \perp (1, 1)$ 0,25

ب) بين أن φ تماثل تقابلي. 0,5

ج) استنتج بنية (E, \perp) . 0,5

التمرين الثاني: (4 نقط)

m عدد عقدي يخالف 1 .

I. نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z:

$$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

(أ-1) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$ 0,25

(ب) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E) 0,25

(ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جذاء حلي المعادلة (E) يساوي 1. 0,5

2- نضع: $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$ 1

في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

II. المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$

1- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمة 0,5

2- (أ) بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ 0,5

هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

(ب) بين أن العدد العقدي $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$ 0,5

($\text{Re}(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\text{Im}(m)$ هو جزؤه التخيلي)

(ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. 0,5

التمرين الثالث: (3 نقط)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

(أ-1) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من \mathbb{N}^* 0,25

(ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0 [3]$ 0,5

2- ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$

(أ) بين أن $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $6^{p-1} \equiv 1 [p]$ 0,75

(ب) بين أن p يقسم a_{p-2} 0,75

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n

بحيث: $a_n \wedge q = q$ ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)

مسألة: (10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$f_n(0) = 0 \quad \text{و} \quad f_n(x) = x(1 - \ln x)^n \quad \text{من أجل} \quad x > 0$$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول

1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0. (يمكنك وضع $x = t^n$)

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0

ج) حدد النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

2- أ) ادرس تغيرات الدالة f_1

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2

3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) . (نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2))

$$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}) \quad \text{(نأخذ)}$$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي: $F(x) = \int_x^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

1- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0]$ وأن: $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ ($\forall x < 0$)

ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$

2- أ) بين أن: $\frac{1}{2} \int_x^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^1 f_1(t) dt$ ($\forall x < 0$)

ب) تحقق أن الدالة $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$

ج) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$

3- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يزول x إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$ 0,25

الجزء الثالث

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

1- أ) بين أن: $u_n \geq 0$ ($\forall n \geq 1$) 0,5

ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$ 0,5

ج) بين أن: $u_{n+1} \leq u_n$ ($\forall n \geq 1$) 0,25

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة 0,25

2- أ) بين أن: $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$ ($\forall n \geq 1$) 0,5

ب) استنتج بالسنتزم المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) 0,5

والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$

3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ ($\forall n \geq 2$) (يمكنك استعمال الأمثلة: 1-1 و 1-2 و 1-3) 0,75

ب) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$ 0,5

4- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_1 = a$ و $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n$ ($\forall n \geq 1$)

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $d_n = |v_n - u_n|$

أ) بين أن: $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$ ($\forall n \geq 1$) 0,25

ب) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$ 0,5

ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة. 0,25