الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع

9	المعامل	RS24		الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز			شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب(ة) أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....................(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات ....(2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.................(4ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل...........................(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.........................(4 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول:(3.5 نقط)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع: $x * y = \dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

1-أ) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . 0.5ن

ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي. 0.5ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.5ن

2- بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. 0.5ن

3- نعتبر المجموعتين $H = \{2^n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ و $K = \left\{\dfrac{1}{1+2^n} \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ 0,5 ن

ب) نعتبر التطبيق : $\begin{aligned}\varphi : H &\to I\\ x &\mapsto \dfrac{1}{1+x}\end{aligned}$. بين أن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$ 0,5 ن

ج) استنتج أن K زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$ 0.5ن

التمرين الثاني:(2.5 نقط)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق: $10^x \equiv 2 \quad [19]$

1 - أ) تحقق أن: $10^{x+1} \equiv 1 \ [19]$ 0.25ن

ب) بين أن: $10^{18} \equiv 1 \ [19]$ 0.5ن

2- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $x+1$

أ) بين أن: $10^d \equiv 1 \ [19]$ 0.75ن

ب) بين أن: $d = 18$ 0.5ن

ج) استنتج أن: $x \equiv 17 \ [18]$ 0.5ن

التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0 \quad (E)$

0.5ن 1- تحقق أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E)

0.5ن 2- حدد العددين العقديين α و β بحيث :

$$(\forall z\in\mathbb{C}) \ : \ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

0.5ن 3- أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $5-12i$

0.5ن ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$

0.5ن 1- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C

2- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2

0.5ن أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران R_1 هي : $z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0.5ن ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z

0.5ن ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثابتة.

التمرين الرابع: (6 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\ln x$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1ن 1- احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

0.25ن 2- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f

0.75ن ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0.75ن 3- احسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5ن 4- أ) احسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$ (يمكنك وضع : $t=f^{-1}(x)$)

0.5ن ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$

5- نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$

0.25ن أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

0.5ن ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

0.5ن 6- أ) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad f(x_n)\le f(n)$ ثم استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad x_n\le n$

0.5ن ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad n-\ln(n)\le x_n$

0.5ن ج) احسب النهايتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-n}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n-\ln(n)}$

التمرين الخامس:(4 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+.........+\frac{x^n}{n}$$

0.5ن 1- بين أنه من أجل $n\ge 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$

0.75ن 2- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\ge2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.(نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$)

0.5ن 3- أ) تحقق أنه من أجل $t\neq1$ لدينا : $1+t+t^2.........+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$

0.5ن ب)استنتج أن: $\alpha_n+\dfrac{\alpha_n^2}{2}+.........+\dfrac{\alpha_n^n}{n}=-ln(1-\alpha_n)-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5ن 4- أ) بين أن: $1+ln(1-\alpha_n)=-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5ن ب) بين أن: $0\le\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt\le\frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}\qquad(\forall n\ge2)$

0.75ن ج)استنتج أن: $\ell=1-e^{-1}$

انتهى